C. Fonctions cyclométriques

5. Exercices

1. Détermine la valeur des expressions suivantes en radians, sans calculatrice.

   (1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$

   (2) $\arcsin(-0,5)=-\frac{\pi}{6}$

   (3) $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

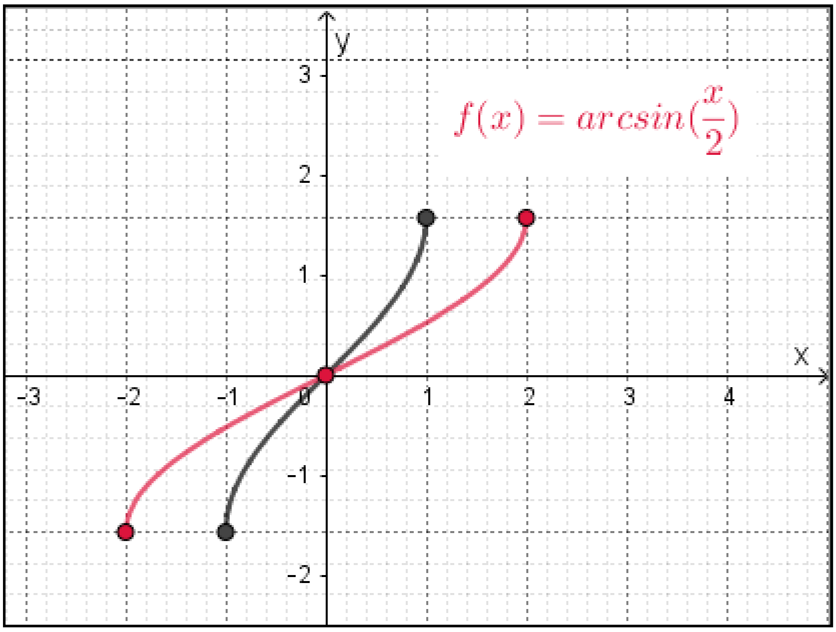
   (4) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$

   (5) $\arccos\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}$

   (6) $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$

2. Trace le graphe des fonctions suivantes au départ des fonctions usuelles et détermine leurs domaine, racine(s), ensemble-image et éventuelles asymptotes :

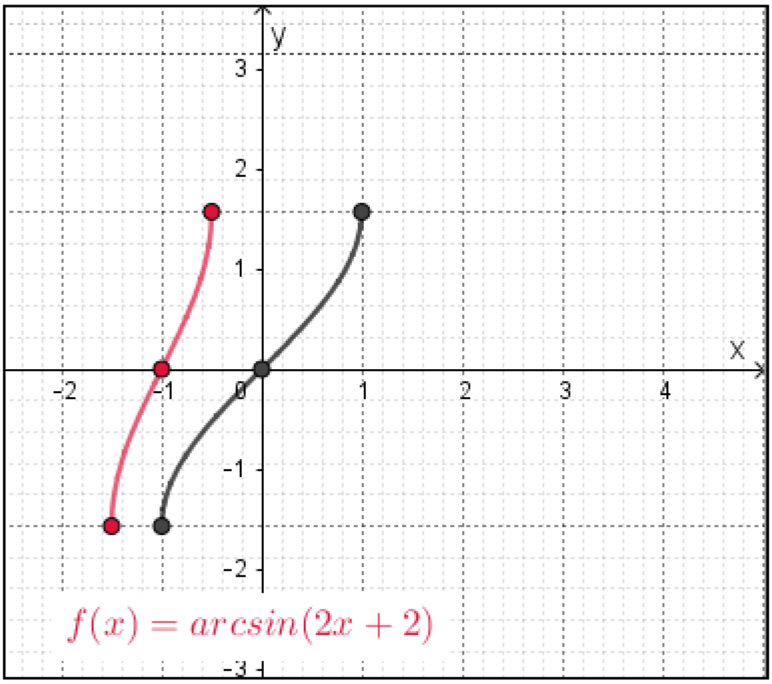
   (1) $f(x)=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$



$dom\, f=[-2;2]$ Racine : $x=0$

$\mathrm{Im}\, f=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Pas d'asymptote

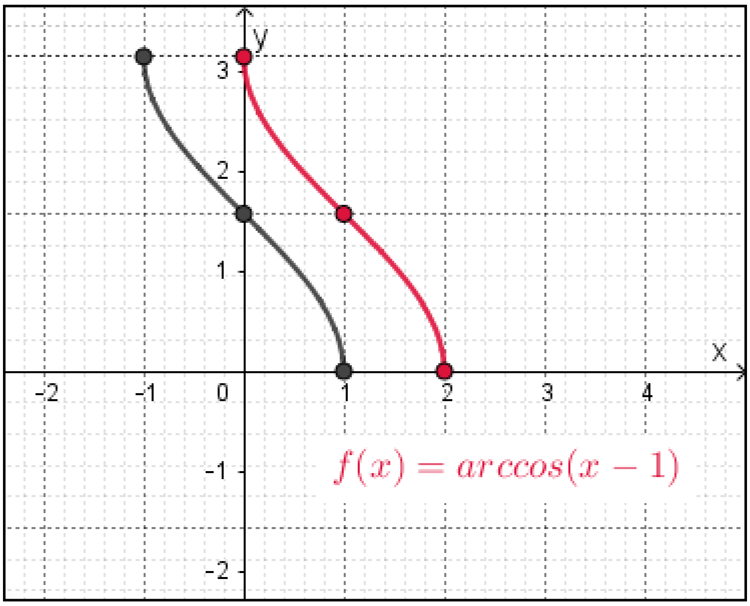
(2) $f(x)=\arcsin(2x+2)$



$dom\, f = \left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$ Racine : $x=-1$

$\operatorname{Im} f = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Pas d'asymptote

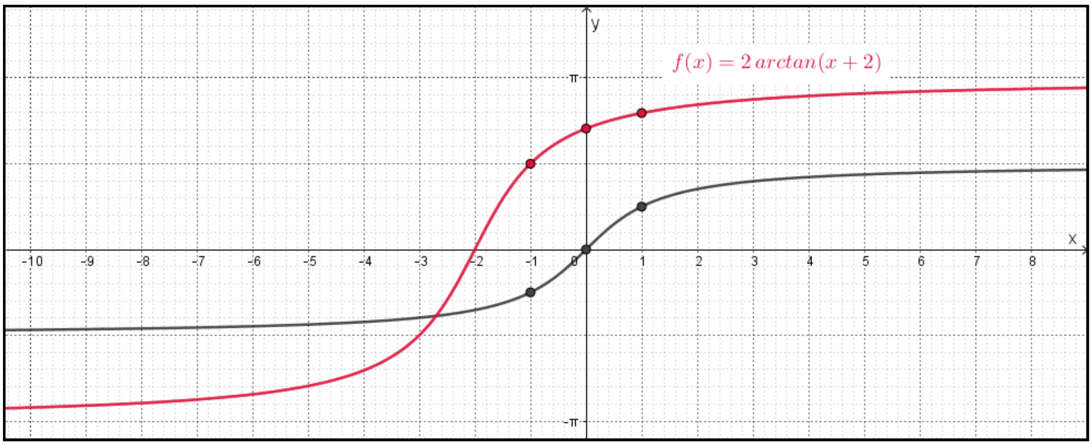
(3) $f(x)=\arccos(x-1)$



$dom\, f = [0;2]$ Racine : $x=2$

$\operatorname{Im} f = [0;\pi]$ Pa d'asymptote

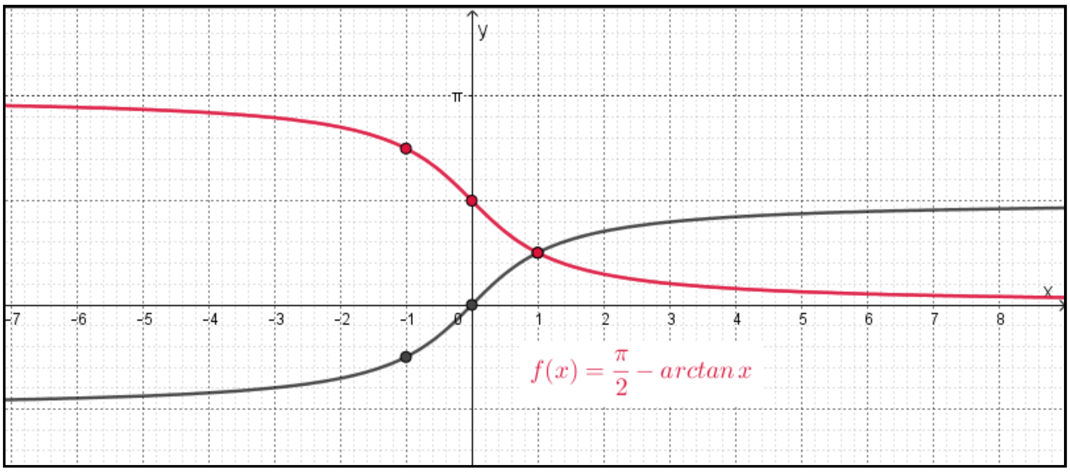
(4) $f(x) = 2\arctan(x+2)$



$dom\ f = \mathbb{R}$ Racine : $x = -2$

$\operatorname{Im} f = [-\pi;\pi]$ $AH_{+\infty} \equiv y = \pi$ et $AH_{-\infty} \equiv y = -\pi$

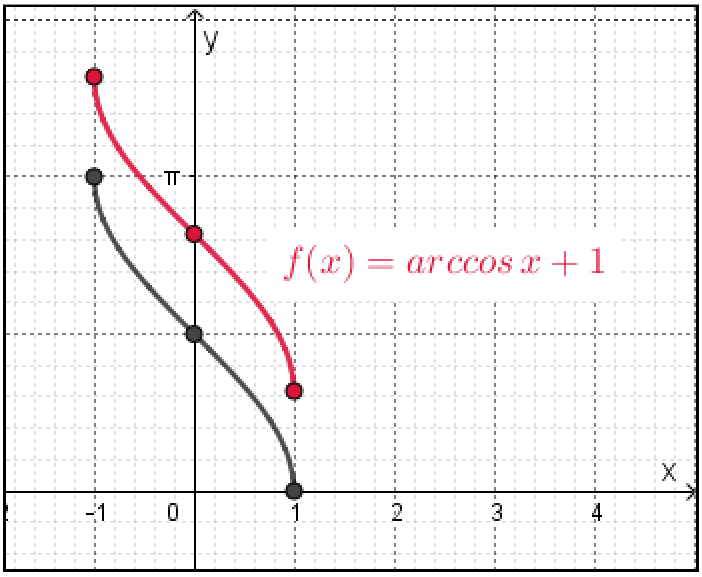
(5) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$



$dom\ f = \mathbb{R}$ Racine : aucune

$\operatorname{Im} f =]0;\pi[$ $AH_{+\infty} \equiv y = 0$ et $AH_{-\infty} \equiv y = \pi$

(6) $f(x) = \arccos x + 1$



$dom\, f = [-1;1]$ Racine : aucune

$\operatorname{Im} f = [1;\pi+1]$ Pas d'asymptote

3. Détermine une expression analytique de la réciproque des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = 3.\sin(2x) + 1$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right)$

(2) $f(x) = \arccos(3x) - 4$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\cos(x+4)$

(3) $f(x) = \arctan\left(\frac{2}{5}x\right)$ $f^{-1}(x) = \frac{5}{2}\tan x$

4. Donne les conditions d'existence, le domaine de définition, la(les) racine(s) et la dérivée des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \arcsin(2x)$

(2) $f(x) = \arcsin(x+1)$

(3) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

(4) $f(x) = \arccos\sqrt{x^2 - 1}$

(5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin x$

(6) $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{x-1}\right)$

	CE	Domaine	Racine(s)	Dérivée
$f(x)=\arcsin(2x)$	$-1\leq 2x\leq 1$	$dom\, f=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$	$x=0$	$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
$f(x)=\arcsin(x+1)$	$-1\leq x+1\leq 1$	$dom\, f=[-2;0]$	$x=-1$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}}$
$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$	$x\neq 0$	$dom\, f=\mathrm{IR}_0$	Aucune	$f'(x)=\frac{-1}{x^2+1}$
$f(x)=\arccos\sqrt{x^2-1}$	$-1\leq\sqrt{x^2-1}\leq 1$ et $x^2-1\geq 0$	$dom\, f=$ $\left[-\sqrt{2};-1\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right]$	$x=\pm\sqrt{2}$	$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}.\sqrt{2-x^2}}$
$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\arcsin x$	$x^2-1\geq 0$ et $-1\leq x\leq 1$	$dom\, f=\{-1;1\}$	Aucune	$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$-1\leq\frac{x}{x-1}\leq 1$ et $x-1\neq 0$	$dom\, f=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$	Aucune	$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)\sqrt{-2x+1}}$

5. (1) Si $y=\arcsin x$, que valent $\sin y, \cos y, \tan y$?

$$\sin(\arcsin x)=x$$
$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$
$$\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) Si $y=\arccos x$, que valent $\cos y, \sin y, \tan y$?

$$\cos(\arccos x)=x$$
$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$$
$$\tan(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(3) Si $y=\arctan x$, que valent $\tan y, \sin y, \cos y$?

$$\tan(\arctan x)=x$$
$$\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

6. Vérifie les identités suivantes (sans calculatrice) :

   (1) $\forall x \in [-1;1] : \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

   (2) $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

   (3) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

   (4) $\arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

7. Résous les équations suivantes :

   (1) $\arcsin(2x+4) = 0$

   CE : $-\dfrac{5}{2} \leq x \leq -\dfrac{3}{2}$ $\quad S = \{-2\}$

   (2) $\arccos(2x) + 4 = 0$

   CE : $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ $\quad S = \varnothing$

   (3) $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \dfrac{\pi}{4}$

   CE : aucune $\quad S = \left\{\dfrac{1}{6}\right\}$ (-1 est une solution à rejeter)

   (4) $\arcsin 2x = \dfrac{\pi}{4} + \arcsin x$

   CE : $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ $\quad S = \{-0,48\}$

   (5) $\arcsin\dfrac{3}{5} + \arcsin\dfrac{4}{5} = x$

   CE : $-\pi \leq x \leq \pi$ $\quad S = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

   (6) $\arccos x = 2.\arccos\left(\dfrac{3}{4}\right)$

   CE : $-1 \leq x \leq 1$ $\quad S = \left\{\dfrac{1}{8}\right\}$

   (7) $\arccos(2x) - \arccos x = \dfrac{\pi}{3}$

   CE : $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ $\quad S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ ($\dfrac{1}{2}$ est une solution à rejeter)

8. Détermine une équation de la tangente à la courbe d'équation $y=2\arccos\left(x^2-2x\right)$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

$$y=\frac{8\sqrt{7}}{7}x+3,33$$

9. Calcule les limites suivantes et donnes-en une interprétation graphique :

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}+2\cos x}{\tan^2 x-1}$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}+2.\cos x}{\tan^2 x-1}=\frac{0}{0}\text{ CI}$$

$$=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{-2.\sin x}{2.\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{-2.\frac{\sqrt{2}}{2}}{2.(-1).\frac{1}{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\Rightarrow$ Trou en $(\frac{3\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arcsin\left(2x-1\right)$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\arcsin(2x-1)=0$$

$\Rightarrow (\frac{1}{2};0)\in G_f$

(3) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\arccos\left(1-x\right)$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\arccos(1-x)=\arccos\frac{3}{2}=\nexists$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\arctan(\frac{1}{x})=\arctan\frac{1}{0}\text{CI}$$

x		0	
x	$-$	0	+

On a alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} arctan(\frac{1}{x}) = arctan\frac{1}{0^+} = arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

et $\lim\limits_{x \to 0^-} arctan(\frac{1}{x}) = arctan\frac{1}{0^-} = arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Trous en $(0; \frac{\pi}{2})$ et $(0; -\frac{\pi}{2})$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\arctan 2x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{arctan\,2x} = \frac{0}{0}$ CI

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{\frac{2}{1+4x^2}} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ Trou en $(0; \frac{3}{2})$

(6) $\lim\limits_{x\to +\infty} x.\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - arctan\,x}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$ CI

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2.(\frac{1}{x^2}+1)}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2.(\frac{1}{x^2}+1)}$

$= 1$

$\Rightarrow AH_{+\infty} \equiv y = 1$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x - 2x}{\sin^3 x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsin\,x - 2x}{sin^3 x} = \frac{0}{0}$ CI

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2}{3.sin^2x.cosx} = \frac{-1}{0}$ CI

x		0	
sin^2x	+	0	+
$cosx$	+	1	+
$sin^2x.\,cosx$	+	0	+

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-2}{3.\sin^2 x.\cos x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$\Rightarrow AV \equiv x = 0$

(8) $\lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arccos x - \arcsin x}{x^2 - \frac{1}{2}}$

$$\lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arccos x - \arcsin x}{x^2 - \frac{1}{2}} = \frac{0}{0} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}.x} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$\Rightarrow$ Trou en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -2\right)$

(9) $\lim_{x \to 1} \frac{-\arccos x}{\arcsin x}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{-\arccos x}{\arcsin x} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$\Rightarrow (1;0) \in G_f$

10. Recherche les équations des asymptotes de la fonction $f(x) = x^2.\arctan\frac{1}{1+x}$.

Pas d'asymptote verticale (Trous en $\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$ et en $\left(1;-\frac{\pi}{2}\right)$)

Pas d'asymptote horizontale

$AO \equiv y = x - 1$

11. Fais l'étude complète de la fonction $f(x)=\arctan\left(\frac{-x}{x+2}\right)$ (domaine, parité, intersection avec les axes, asymptotes, dérivée première et croissance, dérivée seconde et concavité, tableau récapitulatif, graphique)

$dom\, f = IR \setminus \{-2\}$

f est quelconque

$\cap Ox : (0;0)$

$\cap Oy : (0;0)$

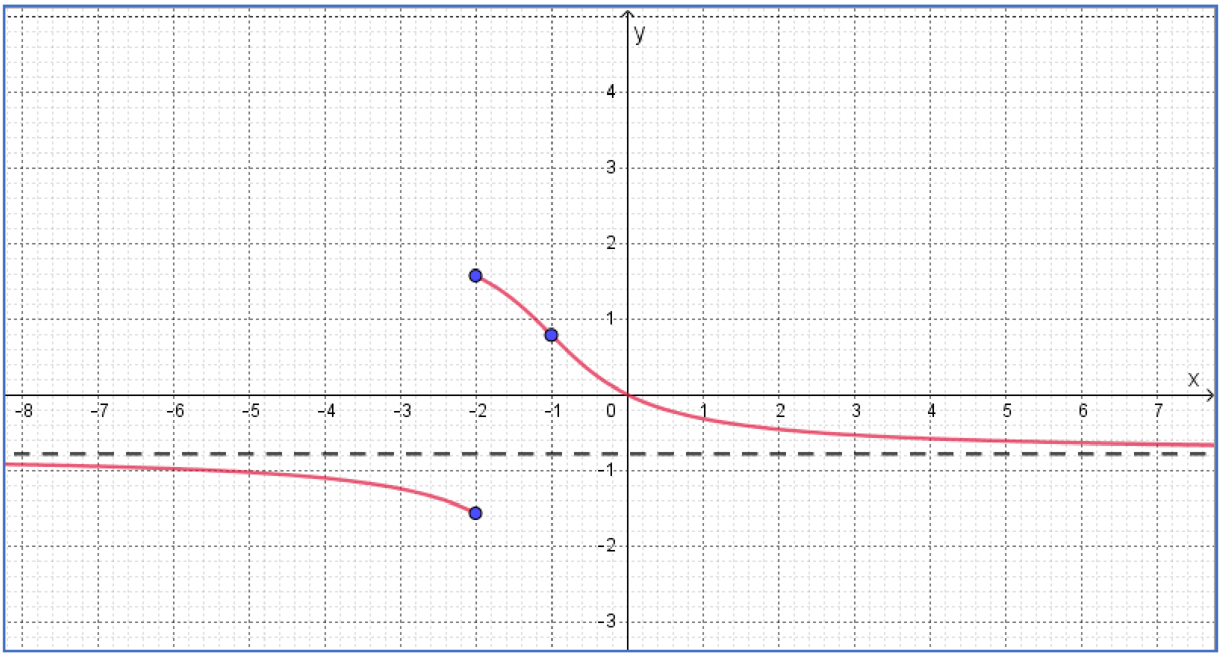
Pas d'asymptote verticale ($\lim_{x\to -2^+} f(x)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to -2^-} f(x)=-\frac{\pi}{2}$)

$AH \equiv y=-\frac{\pi}{4}$

Pas d'asymptote oblique

$f'(x)=\frac{-1}{x^2+2x+2}$ ➔ f est toujours décroissante

$f''(x)=\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$ ➔ f admet un point d'inflexion en $\left(-1;\frac{\pi}{4}\right)$



12. Lors d'une exposition de peinture, un amateur d'art observe un tableau d'une hauteur de 2,8 m suspendu à 1,2 m du sol. Les yeux de l'observateur sont à 1,7 m du sol. A quelle distance du mur doit-il se tenir s'il veut observer le tableau sous un angle de vision de 45° ?

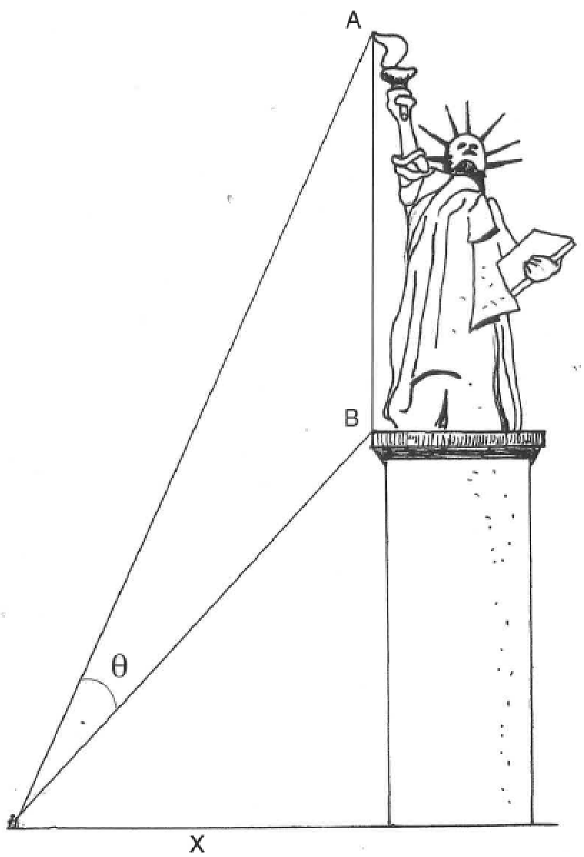
    L'observateur doit se tenir à 3,16 m du mur.

13. Un photographe cherche à déterminer la distance x à laquelle il doit placer son appareil pour prendre une photo de la statue de la liberté sous un angle θ maximal.

    On admet que θ est compris entre 0° et 90°.

    Voici les conditions à respecter :

    - l'appareil photo est à 1,5 m du sol ;
    - le piédestal a pour hauteur 45 m ;
    - la statue mesure également 45 m de hauteur.



Le photographe doit se placer à 62,04 m de la statue $(\theta = 19{,}93°)$.