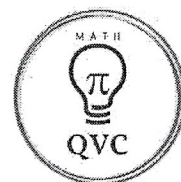


# FONCTIONS RÉCIPROQUES ET CYCLOMÉTRIQUES



Fonctions cyclométriques

C. SCOLAS

<https://bit.ly/4g9p0jx>

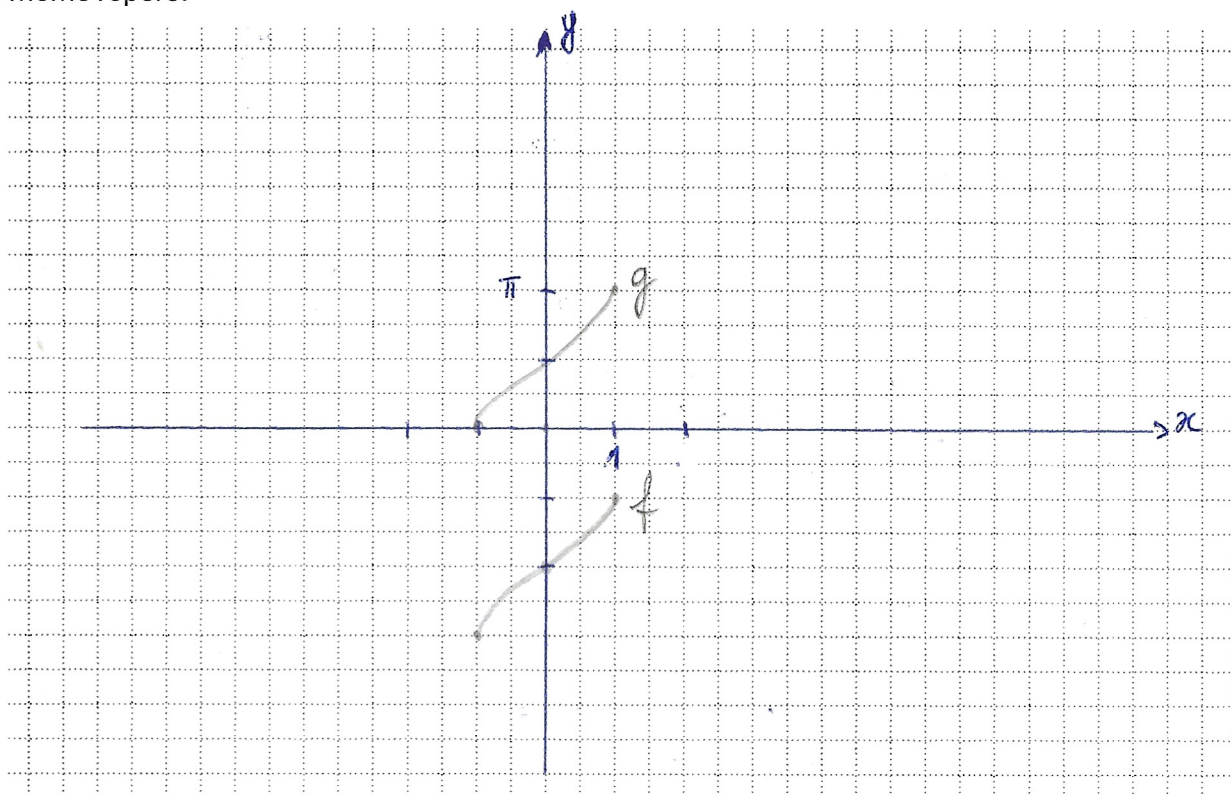
1. Calcule la valeur exacte de chaque expression, quand elle existe, et sans calculatrice :

$$(1) \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \arccos(-1) = \pi$$

$$(3) \sin\left(\arcsin\left(-\frac{3}{10}\right)\right) = -\frac{3}{10} \quad -\frac{3}{10} \in [-1, 1]$$

2. Trace le graphique des fonctions  $f(x) = \arcsin x - \pi$  et  $g(x) = \arccos(-x)$  dans le même repère.



Pour  $f$  : on soustrait  $\pi$  à chaque ordonnée de la fonction  $\arcsin$ .

Pour  $g$  : on change chaque abscisse par  $-1$  de la fonction  $\arccos$ .

3. Détermine le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \arcsin(-x^2 - 2x + 1)$ .

$$\text{CE: } -1 \leq -x^2 - 2x + 1 \leq 1 \quad \begin{array}{l} -x^2 - 2x \leq 0 \\ -x \cdot (x+2) \leq 0 \end{array}$$

$$0 \leq -x^2 - 2x + 2$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 12$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1-\sqrt{3} & & -1+\sqrt{3} \\ -x^2-2x+1 & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & -2 & 0 \\ -x^2-2x & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

$$\text{dom } f = [-1-\sqrt{3}; -2] \cup [0; -1+\sqrt{3}]$$

4. Détermine le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \arccos(2-5x)$ .

$$\text{CE: } -1 \leq 2-5x \leq 1$$

$$-3 \leq -5x \leq -1$$

$$\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$$

$$\text{dom } f = \left[\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right]$$

5. Résous les équations suivantes.

N'oublie pas les conditions d'existence.

Si une solution était à rejeter, expliques-en la raison.

$$(1) \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{CE1: } x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$\text{CE2: } x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

$$\frac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x+2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)(x+2) - (x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 + x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - 4 - x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$(2) \overset{\sin}{\sqrt{\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{3})}} = \overset{\sin}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\text{CE1: } -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{CE2: } -1 \leq \sqrt{3}x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x \cdot \sqrt{1-3x^2} + \sqrt{3} \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} = 1$$

$$(x \cdot \sqrt{1-3x^2})^2 = (1 - \sqrt{3} \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2})^2$$

$$x^2 \cdot (1-3x^2) = 1 - 2\sqrt{3}x \cdot \sqrt{1-x^2} + 3x^2 \cdot (1-x^2)$$

$$x^2 - 3x^4 = 1 - 2\sqrt{3}x \cdot \sqrt{1-x^2} + 3x^2 - 3x^4$$

$$(2\sqrt{3}x\sqrt{1-x^2})^2 = (1+2x^2)^2 \text{ à condition que } x \geq 0$$

$$12x^2 \cdot (1-x^2) = 1 + 4x^2 + 4x^4$$

$$12x^2 - 12x^4 = 1 + 4x^2 + 4x^4$$

$$0 = 16x^4 - 8x^2 + 1$$

$$0 = (4x^2 - 1)^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \text{ à rejeter car } x \geq 0$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$(3) \overset{\sin}{\sqrt{\arccos x}} = \overset{\sin}{\sqrt{\arcsin 2x}}$$

$$\text{CE1: } -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{CE2: } -1 \leq 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$(\sqrt{1-x^2})^2 = (2x)^2 \text{ à condition que } 2x \geq 0$$

$$1-x^2 = 4x^2$$

$$1 = 5x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{5}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{à rejeter car } 2x \geq 0$$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$$

6. Détermine une équation *réduite* de la tangente au graphe de la fonction

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \text{ au point d'abscisse } \frac{3}{2}. \quad T \equiv y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$f'(x) = \frac{1/3}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\Rightarrow T \equiv y = \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{\pi}{6}$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{9} x - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{6}$$

7. Calcule la dérivée de chaque fonction :

$$(1) f(x) = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{2 \cdot (1-x^2) - 2x \cdot (-x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{\frac{(1-x^2)^2 + (2x)^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2 - 2x^2 + 2x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{(1-x^2)^2}{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2} \cdot \frac{2}{(1-x^2)^2} = \frac{2}{1 + 2x^2 + x^4} = \frac{2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$(2) f(x) = (\arcsin x)^2$$

$$f'(x) = 2 \cdot \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(3) f(x) = \arctan \frac{x-3}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1) - (x-3)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{(x+1)^2 + (x-3)^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{x+1 - x+3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 6x + 9} \cdot \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{4}{2x^2 - 4x + 10}$$

$$= \frac{2}{x^2 - 2x + 5}$$

8. Vérifie l'identité  $2 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ .  $\Leftrightarrow \tan \left( \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} \right) = \tan \left( \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{7} \right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1 - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{7}}$$

9. Calcule les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \text{ ci}$$

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin x} = \frac{0}{0} \text{ ci}$$

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{1-x^2}}{\cos x}$$

$$= 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \left( \frac{1}{x} \right) = \arctan \frac{1}{0} \text{ ci}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \left( \frac{1}{x} \right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \left( \frac{1}{x} \right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - 2x}{\sin^3 x} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2}{3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x} = \frac{-1}{0}$$

$$= -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

| $x$                       | 0 |   |   |
|---------------------------|---|---|---|
| $\sin^2 x$                | + | 0 | + |
| $\cos x$                  | + | 1 | + |
| $3 \sin^2 x \cdot \cos x$ | + | 0 | + |

$$2 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan \left( 2 \left( \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} \right) \right) = \tan \left( \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{7} \right)$$

$$\frac{2 \cdot \tan \left( \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} \right)}{1 - \tan^2 \left( \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} \right)} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \left( \arctan \frac{1}{7} \right)}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \left( \arctan \frac{1}{7} \right)}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{\tan \left( \arctan \frac{1}{5} \right) + \tan \left( \arctan \frac{1}{8} \right)}{1 - \tan \left( \arctan \frac{1}{5} \right) \cdot \tan \left( \arctan \frac{1}{8} \right)}}{1 - \left( \frac{\tan \left( \arctan \frac{1}{5} \right) + \tan \left( \arctan \frac{1}{8} \right)}{1 - \tan \left( \arctan \frac{1}{5} \right) \cdot \tan \left( \arctan \frac{1}{8} \right)} \right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{7}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{7}}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}}}{1 - \left( \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}} \right)^2} = \frac{6/7}{8/7}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{13/40}{39/40}}{1 - \left( \frac{13/40}{39/40} \right)^2} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2/3}{8/9} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Nom : .....

Option : ..... Classe : .....

Branche : ..... Date : .....

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)$$

1) CE:  $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R}_0$

2)  $f(-x) = \arctan\left(\frac{1-(-x)^2}{(-x)^2}\right)$   
 $= \arctan\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)$

$= f(x) \Rightarrow f \text{ est paire}$

3)  $\cap O_x: f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$\cap O_y: f(0) = \nexists$

4) AV:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \arctan\left(\frac{1}{0^+}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Trou en } (0; \frac{\pi}{2})$

AH:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) = \arctan\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \text{ ci}$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan\left(\frac{-x^2 \cdot (-\frac{1}{x^2} + 1)}{x^2}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow AH \equiv y = -\frac{\pi}{4}$

AO: il n'y a pas d'AO car il y a déjà une AH.

$$\begin{aligned}
 5) \quad f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^2} \cdot \frac{-2x \cdot x^2 - (1-x^2) \cdot 2x}{x^4} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{(1-x^2)^2}{x^4}} \cdot \frac{-2x^3 - 2x + 2x^3}{x^4} \\
 &= \frac{1}{\frac{x^4 + (1-x^2)^2}{x^4}} \cdot \frac{-2x}{x^4} \\
 &= \frac{x^4}{x^4 + 1 - 2x^2 + x^4} \cdot \frac{-2}{x^3} \\
 &= \frac{-2x}{2x^4 - 2x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Racine : (N)  $x=0$

$$\textcircled{D} \quad 2x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \rightarrow \text{pas de racine}$$

|                       |                                                               |   |   |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------|---|---|
| $x$                   | 0                                                             |   |   |
| $-2x$                 | +                                                             | 0 | - |
| $(2x^4 - 2x^2 + 1)^2$ | +                                                             | + | + |
| $f'$                  | +                                                             | 0 | - |
| $f$                   | $\rightarrow$ trou $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\searrow$ |   |   |

$$\begin{aligned}
 6) \quad f''(x) &= \frac{-2 \cdot (2x^4 - 2x^2 + 1) - (-2x) \cdot (8x^3 - 4x)}{(2x^4 - 2x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{-4x^4 + 4x^2 - 2 + 16x^4 - 8x^2}{(2x^4 - 2x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{12x^4 - 4x^2 - 2}{(2x^4 - 2x^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Racine : (N) } 12x^4 - 4x^2 - 2 = 0$$

\textcircled{D} aucune

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 64 \\
 x^2 &= \frac{4 \pm 8}{24} < \begin{matrix} 1/2 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1/6 \Rightarrow \text{impossible} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

| $x$                   | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$                                                                |   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$                                                                |   |        |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------|---|--------|
| $12x^4 - 4x^2 - 2$    | +                                                                                    | 0 | -                                                                                   | 0 | +      |
| $(2x^4 - 2x^2 + 1)^2$ | +                                                                                    | + | +                                                                                   | + | +      |
| $f''$                 | +                                                                                    | 0 | -                                                                                   | 0 | +      |
| $f$                   | $\cup \begin{matrix} \text{PI} \\ (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}) \end{matrix}$ |   | $\cap \begin{matrix} \text{PI} \\ (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}) \end{matrix}$ |   | $\cup$ |

7) Graphique

