<u>Avertissement</u> : Ces exercices te permettront de préparer l'examen, ***sans*** toutefois te dispenser de refaire les exercices du cours, les exercices supplémentaires et ceux des interrogations. ***<u>Ces quelques pages ne sont pas du tout un substitut du cours !</u>***

Il est impossible de couvrir en quelques pages l'ensemble des chapitres étudiés durant le deuxième semestre.

LOIS DE PROBABILITE

1. Un tableau 4×1 est rempli de manière aléatoire avec les chiffres 0 et 1.

   (1) Combien y a-t-il de façons différentes de remplir le tableau ?

   Chaque case peut être complétée par deux chiffres➔ Il y a $2^4 = 16$ façons de remplir le tableau (0000 ; 1000 ; 0100 ; 0010 ; 0001 ; 1100 ; 1010 ; 1001 ; 0110 ; 0101 ; 0011 ; 1110 ; 1101 ; 1011 ; 0111 et 1111).

   (2) On note S la variable aléatoire qui, à chaque façon, associe la somme des chiffres.

   a. Donne la loi de probabilité de S.

s_i	0	1	2	3	4
$p(S = s_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

   b. Calcule $E(S)$ et $\sigma(S)$.

   $E(S) = 2$ et $\sigma(S) = 1$

2. Une urne contient sept boules : six blanches numérotées 1 à 6 et une noire. On tire successivement et sans remise les sept boules de l'urne.

   (1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

   Il y a $7! = 5040$ tirages possibles.

   (2) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le rang de sortie de la boule noire.

   Calcule $E(X)$ et $\sigma(X)$. Explique par une phrase ce que représentent ces deux nombres dans cet exercice.

Etablir le tableau de la variable aléatoire pour pouvoir calculer l'espérance et l'écart-type :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

$E(X)=4$ et $\sigma(X)=2$

On peut donc s'attendre en moyenne à ce que la boule noire sorte en 4$^{\text{ème}}$ position ; mais ce numéro de sortie varie généralement entre 2 et 6.

3. On lance deux dés cubiques bien équilibrés. Soit *P* la variable aléatoire qui associe à chaque lancer le produit des deux numéros sortis.

   (1) Détermine la loi de probabilité de *P*.

p_i	1	2	3	4	5	6	8	9	10
$p(P=p_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
p_i	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(P=p_i)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

   (2) Calcule $E(P)$.

$E(P)=\frac{441}{36}=8,88$

4. Soit *X* une variable aléatoire définie par :

   $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ et $P(X=k)=\frac{\lambda}{k}$ pour $1\leq k\leq 6$.

   (1) Détermine λ.

$p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)+p(X=6)=1$

$\Leftrightarrow \frac{\lambda}{1}+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{3}+\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{5}+\frac{\lambda}{6}=1$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{20}{49}$

   (2) Calcule $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Etablir le tableau de la loi de la probabilité pour en déduire que $E(X)=\frac{120}{49}=2,45$ et $\sigma(X)=1,604$.

5. Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement et avec remise, une carte, quatre fois de suite.

   Quelle est la probabilité d'avoir exactement un cœur après les quatre tirages ?

   $\boxed{\frac{343}{1024} = 0,335}$

6. Dans un chenil, on vaccine 15 chiots de façon indépendante. Lors des vaccinations précédentes, 20 % des chiots ont présenté une forte réaction au vaccin. Soit X le nombre de chiots qui ont eu une forte réaction suite à cette vaccination.

   (1) Quelle est la probabilité qu'exactement 3 chiots réagissent fortement ?

   $\boxed{p(X = 3) = 0{,}25}$

   (2) Quelle est la probabilité que moins de 2 chiots aient une forte réaction (2 compris)?

   $\boxed{p(X \leq 2) = 0{,}4}$

   (3) Quelle est la probabilité qu'au moins un des chiots réagisse fortement au vaccin ?

   $\boxed{p(X \geq 1) = 0{,}96}$

7. Sébastien et Julien s'affrontent dans un tournoi de tennis de table. La probabilité que Sébastien gagne une partie est de 0,6. Ils jouent 9 parties, le vainqueur est celui qui gagne le plus de parties.

   Quelle est la probabilité que Julien gagne le tournoi ?

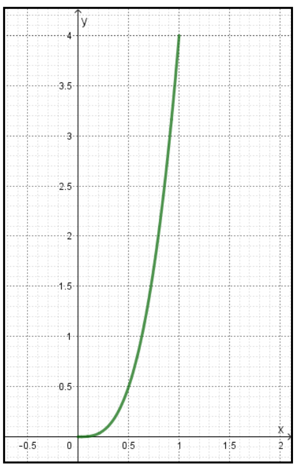
   $\boxed{p(X \geq 5) = 0{,}27}$

8. Soit la fonction $f(x) = 4x^3$.

   (1) Vérifie que *f* est une fonction de densité sur $[0;1]$.

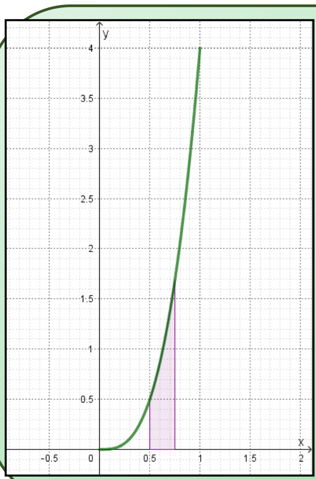
   $\boxed{f \text{ est continue (fonction polynômiale), positive sur } [0;1] \text{ et } \int_0^1 4x^3 dx = 1}$

   (2) Représente la fonction dans un repère orthonormé sur l'intervalle $[0;1]$.



(3) Soit X une variable aléatoire ayant pour densité la fonction f.

a. Indique sur le graphique la probabilité $p(0{,}5 \leq X \leq 0{,}75)$ et calcule cette probabilité.



$\int_{0,5}^{0,75} 4x^3\,dx = 0{,}25$

b. Détermine la valeur de m tel que $p(X \leq m) = 0{,}5$.

$m = 0{,}84$

9. Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite. A l'aide d'une table des valeurs, détermine les probabilités suivantes :

(1) $p(X \leq 0{,}56)$

0,7123

(2) $p(X \geq 1{,}35)$

(3) $p(0{,}56 \leq X \leq 1{,}35)$

10. Une commune met des vélos à disposition de ses habitants. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque vélo choisi au hasard, associe la distance en kilomètres parcourue en une journée. On admet que X suit une loi normale $N(15;6)$.

(1) Quelle est la distance moyenne parcourue par un vélo en une journée ?

15 km

(2) Détermine la probabilité pour qu'un vélo parcoure un jour donné :

a. entre 10 et 18 kilomètres ;

$p(10 \leq X \leq 18) = 0{,}4882$

b. moins de 20 kilomètres.

$p(X \leq 20) = 0{,}7967$

(3) Il y a 4000 vélos à disposition. A combien peut-on évaluer le nombre de vélos parcourant plus de 13 kilomètres en une journée ?

Il y a 2517 vélos parcourant plus de 13 km en une journée.

11. Le poids des tomates produites par un jardinier obéit à une loi normale de 200 g de moyenne et dont l'écart-type est de 40 g.

(1) Calcule la probabilité que le poids d'une tomate excède 250 g.

$p(X \geq 250) = 0{,}1056$

(2) Calcule la probabilité que le poids d'une tomate soit inférieur à 100 g.

$p(X \leq 100) = 0{,}0062$

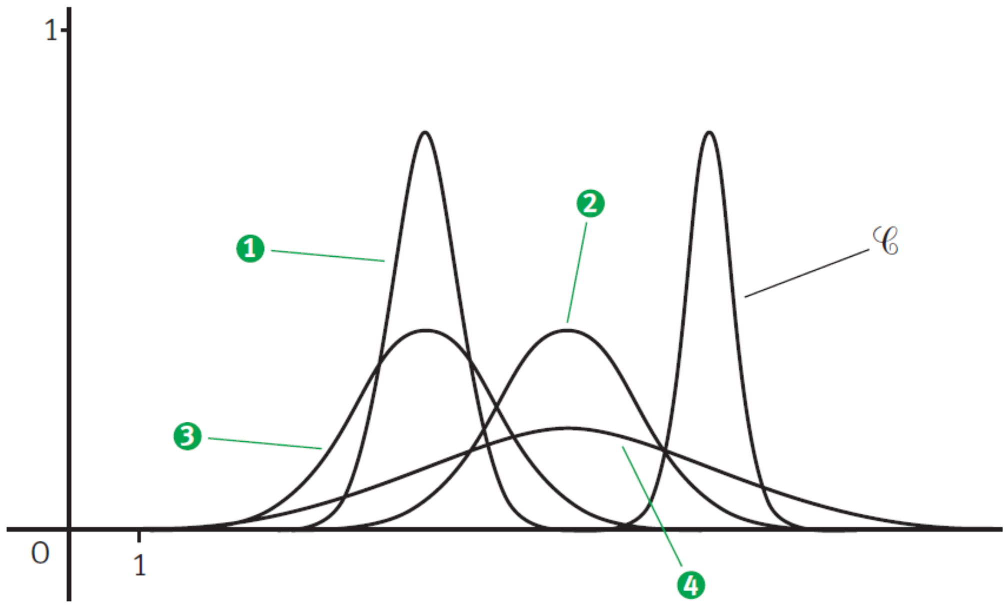
(3) Calcule la probabilité que le poids d'une tomate ne s'écarte pas de la valeur moyenne de plus de 20 g.

$p(180 \leq X \leq 220) = 0{,}383$

12. On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions de densité des lois normales $N(7;1)$, $N(7;2)$, $N(5;1)$ et $N\left(5;\frac{1}{2}\right)$.

a. Associe chaque courbe à la loi correspondante.

b. Propose une valeur pour la moyenne et l'écart-type de la loi représentée par la courbe $\mathcal{C}$.



Courbe 1 : $N\left(5;\frac{1}{2}\right)$

Courbe 2 : N(7 ;1)

Courbe 3 : N(5 ;1)

Courbe 4 : N(7 ;2)

Courbe $\mathcal{C}$: N(9 ;0.5)

13. Un bus passe toutes les 18 minutes à un arrêt de bus.

(1) Quelle est la probabilité que l'on attende moins de 2 minutes ?

0,11

(2) Quelle est la probabilité que l'on attende entre 7 et 12 minutes ?

0,28

(3) Quel est le temps d'attente moyen d'un bus ?

9 minutes

14. Laquelle des fonctions données ci-dessous est une fonction de densité sur $[1;e]$?

(1) $f(x)=\dfrac{x}{e}$

(2) $g(x)=e^x$

(3) $h(x)=\dfrac{1}{x}$

h est la fonction recherchée : toutes sont continues et positives sur l'intervalle $[1;e]$; seule la fonction h vérifie $\int_1^e h(x)dx=1$.

15. La durée de vie, exprimée en heures, d'un composant implanté dans un appareil électroménager jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}002$.

(1) Quelle est la probabilité qu'un tel composant ait une durée de vie supérieure à 100 heures ?

$p(X \geq 100) = 0{,}82$

(2) Quelle est la durée de vie moyenne d'un tel composant ?

500 heures

16. Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.
Il les produit dans deux serres notées A et B. 55% des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A où la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88. Dans la serre B, cette probabilité est égale à 0,84.

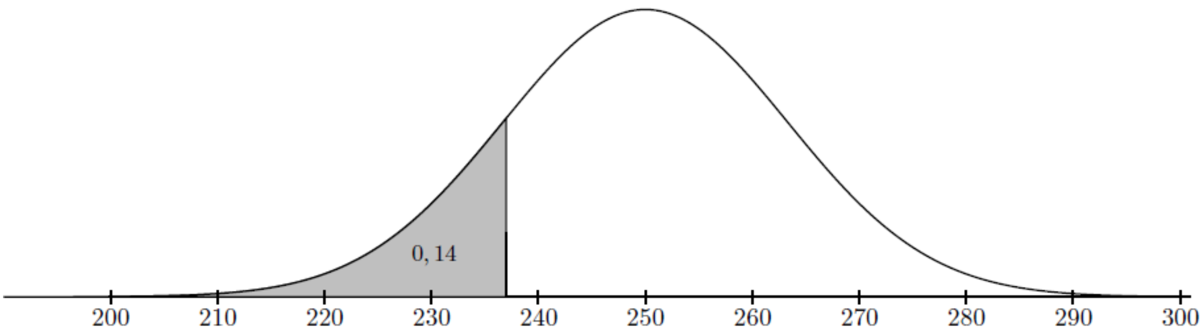
(1) Vrai ou faux ? Justifie ta réponse.

a. La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862. Vrai

b. On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439. Faux (0,561)

(2) Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ .

La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



a. On donne $p(X \leq 237) = 0{,}14$. Calcule la probabilité de l'événement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

$p(237 \leq X \leq 263) = 0{,}72$

b. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

i. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?

Y suit une loi normale centrée réduite

ii. Démontre que $p\left(Y \leq -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0{,}14$

iii. Déduis-en la valeur de σ .

$\sigma = 12{,}04$

CALCUL INTEGRAL

1. Calcule les primitives suivantes :

(1) $\int e^{3\cos 2x}.\sin 2x\,dx = \boxed{-\frac{1}{3}e^{3.\cos 2x}+C}$

(2) $\int \frac{dx}{\tan x} = \boxed{\ln|\sin x|+C}$

(3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx = \boxed{-\sqrt{1-x^4}+C}$

(4) $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx = \boxed{1+\frac{1}{x+1}+C}$

(5) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \boxed{x.\tan x+\ln|\cos x|+C}$

(6) $\int \frac{2\arctan x}{1+x^2}dx = \boxed{\arctan^2 x+C}$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2+4x}} = \boxed{\arcsin\frac{x-2}{3}+C}$

(8) $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}dx = \boxed{\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}+C}$

(9) $\int e^{\sqrt{x}}dx = \boxed{2\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C}$

(10) $\int (x^3-x^2).\ln x\,dx = \boxed{\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right).\ln x-\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{9}+C}$

(11) $\int \frac{2x^5-3x^4-3}{x^3-x^2-4x+4}dx = \boxed{\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+7x-4\ln|x-1|+\frac{29}{4}\ln|x-2|-\frac{33}{4}\ln|x+2|+C}$

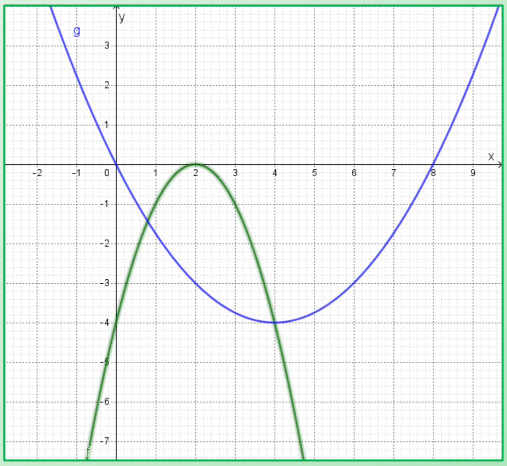
(12) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}+C}$

2. Calcule l'aire de la surface délimitée par la courbe $y=\tan x$, l'axe des ordonnées et la droite $y=1$.

Sol : 0,35 u.a.

3. Représente, dans un repère orthonormé, les graphiques des fonctions $f(x)=-(x-2)^2$ et $g(x)=\frac{x^2}{4}-2x$.

Détermine l'aire de la surface délimitée par ces deux fonctions, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. Colorie cette surface sur le graphique.



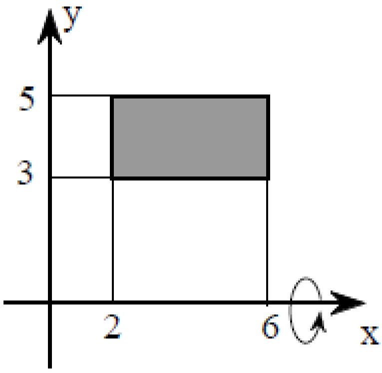
Abscisse du point d'intersection des deux fonctions : $x = \frac{4}{5}$

$$S = -\int_0^{4/5} -(x-2)^2\,dx + \int_{4/5}^{2} \left[-(x-2)^2 - \left(\frac{x^2}{4} - 2x\right)\right] dx$$

$= 2{,}09 + 2{,}16$

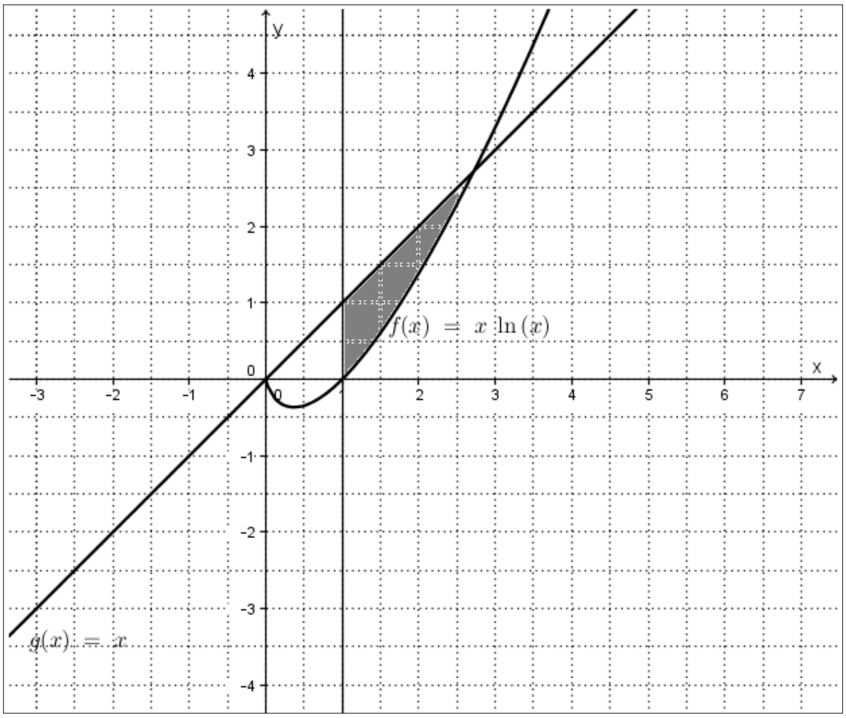
$= 4{,}25\,u.a.$

4. Représente approximativement l'objet obtenu par la révolution de la surface grisée autour de Ox, en respectant les dimensions données par le schéma.



Il s'agit d'un cylindre creux.

5. Calcule l'aire de la surface grisée en déterminant au préalable leurs points d'intersections.



Les points d'intersection ont pour abscisse 0 et e.

$$S = \int_1^e (x - x.\ln x)dx$$ Intégrale à calculer par parties

$= 1{,}1$u.a.

6. Calcule l'aire de la surface délimitée par les graphiques des fonctions $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = (x+2)^2.(x-2)$. Cette surface est formée de deux parties.

$$S = \int_{-2}^{-1} (g(x) - f(x))dx + \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))$$

$= 8{,}58 + 12{,}75$

$= 21{,}33\,u.a.$

7. Détermine le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface délimitée par le graphe de la fonction $f(x) = (2x+1)^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

$$V = \frac{22\pi}{5} u.v.$$

8. Détermine la longueur de l'arc de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x^3}-\sqrt{x}$ pour $x\in[0;4]$.

$$\boxed{L=\frac{38}{5}\ u.l.}$$

9. Le chiffre d'affaires sur un produit est modélisé par la fonction $f(x)=\frac{-4}{1+2x}+8$ pour $x\in[0;6]$.

x est le nombre de produits vendus, en dizaine de milliers et $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros.

Calcule la valeur moyenne du chiffre d'affaires pour les 40 000 premiers produits vendus.

$\boxed{7725\ €}$

NOMBRES COMPLEXES

1. Exprime les nombres complexes suivants sous leur forme algébrique :

   (1) $(3+4i).(2-5i)=$

   $\boxed{26-7i}$

   (2) $i(3-2i)^2=$

   $\boxed{12+5i}$

   (3) $\dfrac{1-7i}{6-2i}=$

   $\boxed{\dfrac{1}{2}-i}$

2. Résous les équations suivantes et donne les solutions sous leur forme algébrique :

   (1) $z^2-6z+13=0$

   $\boxed{S=\{3\pm 2i\}}$

   (2) $(1+i)z^2-5(1+i)z+8+6i=0$

   $\boxed{S=\left\{\dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{2}i;\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right\}}$

   (3) $z^3+3z^2+4z=0$

   $\boxed{S=\left\{0;-\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}i\right\}}$

   (4) $(8-8i)z^2+(8+8i)z+(-1-5i)=0$

   $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i;-\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4}i\right\}}$

   (5) $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$

   $\boxed{S=\{2;-3-i\}}$

3. Utilise la formule de De Moivre pour calculer $(3+3i)^5$. Donne sa forme algébrique.

$\boxed{-972-972i}$

4. Résous l'équation $z^4=-1-\sqrt{3}i$ et donne les solutions sous forme trigonométrique.

$$\boxed{\begin{array}{l} z_0=\sqrt[4]{2}cis(-30°) \\ z_1=\sqrt[4]{2}cis(60°) \\ z_2=\sqrt[4]{2}cis(150°) \\ z_3=\sqrt[4]{2}cis(240°) \end{array}}$$

5. Calcule les racines cubiques du nombre complexe $z = -4 + 4i$. Donne-les sous forme algébrique et représente-les dans un plan de Gauss.

$z_0 = 1 + i$

$z_1 =$

$z_2 =$

LIEUX GEOMETRIQUES

1. Soit ABC un triangle tel que $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$ et $\overline{BC}=5$. Détermine l'ensemble des points P du plan vérifiant l'égalité $3\overline{AM}^2-4\overline{BM}^2+2\overline{CM}^2=-16$. Précise la nature de ce lieu.

   En choisissant un repère tel que le point A est l'origine du repère, B a pour coordonnées $(4;0)$ et $C(0;3)$, le lieu est un cercle de centre $(-16;6)$ et de rayon $\sqrt{322}$.

2. Détermine la nature et les caractéristiques de chaque conique :

   (1) $y^2+4y-4x+8=0$

   Parabole centrée en (1 ;-2)

   Axe focal : $y=-2$

   Foyer : $F(2;-2)$

   Directrice : $x=0$

   (2) $25x^2+4y^2-250x-16y+541=0$

   (3) $9x^2-4y^2-18x-8y-31=0$

   Hyperbole centrée en $(1;-1)$

   Axe focal : $y=-1$

   Foyers : $F(\ )$ et

3. Détermine l'équation de l'ellipse centrée au point $\left(-1;\frac{2}{3}\right)$, dont le grand axe mesure 12 et un foyer a pour coordonnées $\left(4;\frac{2}{3}\right)$.

4. Détermine l'équation de l'hyperbole dont les sommets ont pour coordonnées $S(\pm3;0)$ et qui passe par le point $P(5;2)$.

   Précise les équations de ses asymptotes.

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$$

Asymptotes : $y=\pm\frac{1}{2}x$

5. Détermine l'équation de la parabole de foyer $F(1;2)$ et de directrice $d \equiv x=-3$

6. Détermine une équation de l'ellipse centrée à l'origine et passant par les points $A(2;3)$ et $B(6;1)$.

7. L'excentricité d'une conique est égale à 1,5. Son axe focal est horizontal et la distance focale vaut 6. Détermine l'équation de cette conique sachant que son centre est le point $(1;2)$.

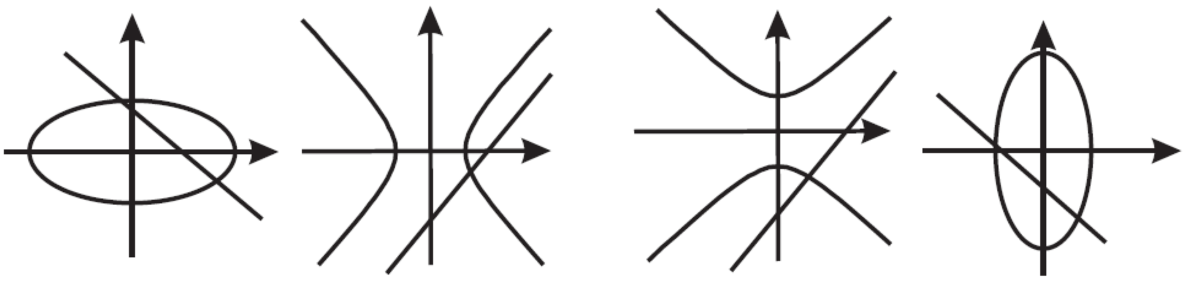
8. Soit l'équation $y^2+4x=0$.
   (1) Trace cette courbe.
   (2) Détermine les équations des tangentes à la parabole comprenant le point $P(2;-1)$.
   (3) Quelles sont les coordonnées des points de contact ?

9. Détermine une équation de la parabole d'axe focal *Ox*, dont le sommet se trouve à l'origine et qui passe par le point $P(7;-3)$.

   Détermine les coordonnées du foyer de cette parabole et représente-la.

10. Détermine les équations des tangentes à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$
    (1) en ses points d'abscisse 2 ;
    (2) parallèles à la droite $d \equiv 3x+2y+7=0$

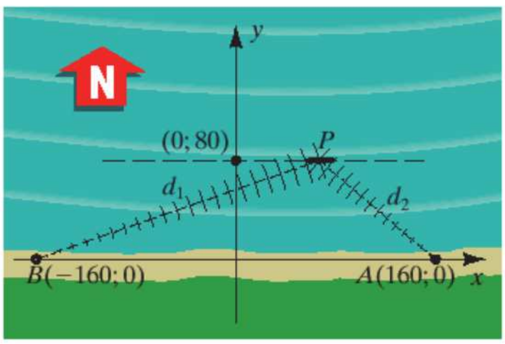
11. Soient *a* et *b* deux réels non nuls. On considère la conique d'équation $bx^2+ay^2=ab$ et la droite d'équation $ax-y+b=0$. Parmi les graphes suivants, lesquels représentent la droite et la conique ? Explique ton raisonnement.

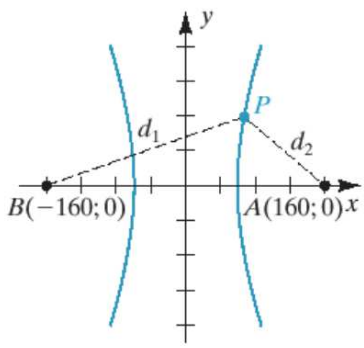


12. Détermine les coordonnées des éventuels points d'intersection de la conique $x^2 - y^2 + 4 = 0$ et de la droite $d \equiv 2x - y - 2 = 0$.

    Représente la situation.

13. Le poste de garde-côtes A est à 320 km à l'est d'un autre poste B. Un bateau navigue le long d'une droite parallèle et à 80 km au nord de la droite reliant A et B. Des signaux radio sont émis à partir de A et B à la vitesse de 294 m/µs (mètre/microseconde). Sachant qu'à 13h00, le signal parti de B atteint le bateau 400 µs après le signal émis par A,





localise la position du bateau à ce moment-là.

A 13h, P est sur la branche droite de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Pour une hyperbole, on a $d_1 - d_2 = 2a \Leftrightarrow \overline{BP} - \overline{AP} = 2a$

$\Leftrightarrow 294 \times 400 = 2a$

$\Leftrightarrow 117\,600 = 2a$

$\Leftrightarrow a = 58{,}8\,\text{km}$

Or, $c = 160$.

Ainsi, $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{160^2-58{,}8^2}=149$.

L'hyperbole a donc pour équation $\dfrac{x^2}{58{,}8^2}-\dfrac{y^2}{149^2}=1$.

Comme $y=80$, on calcule x : $x=58{,}8\times\sqrt{1+\dfrac{80^2}{149^2}}=66{,}7$.

La position du bateau à 13 h est $P(66{,}7;80)$ (en km).