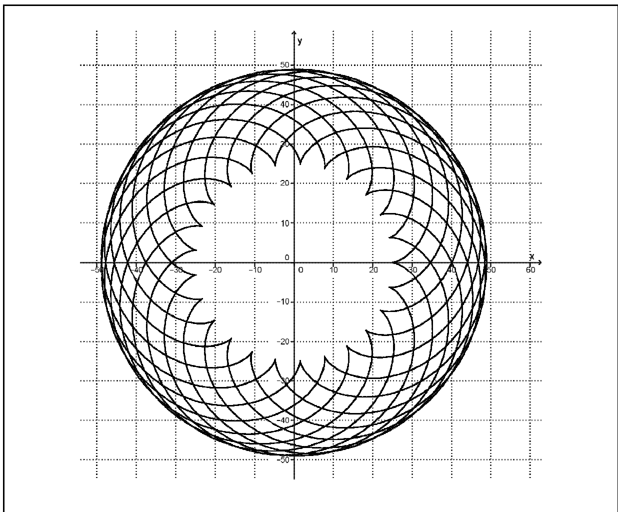
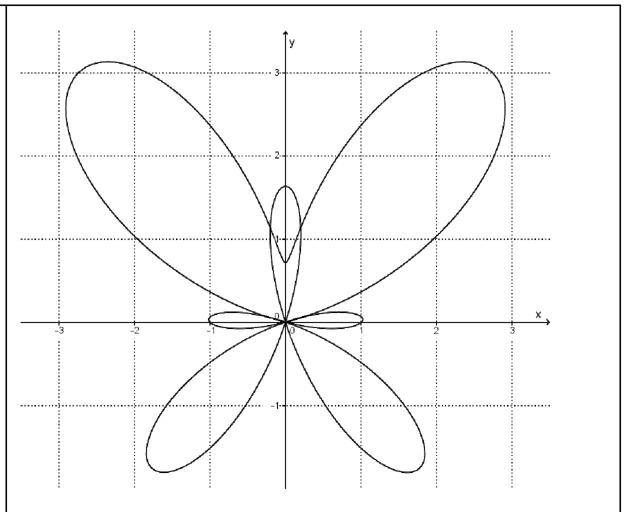
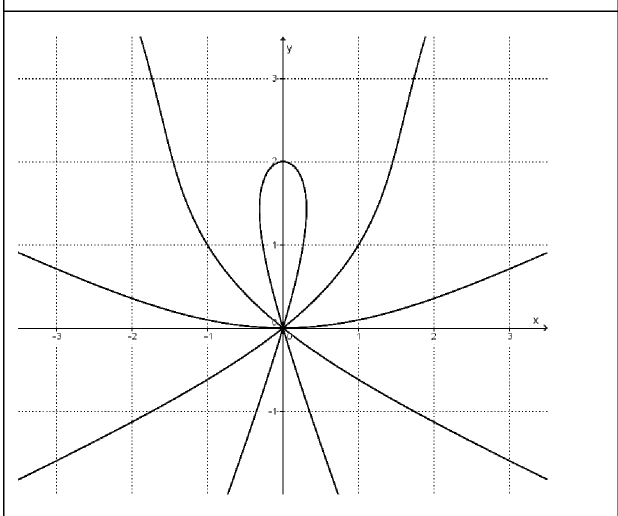
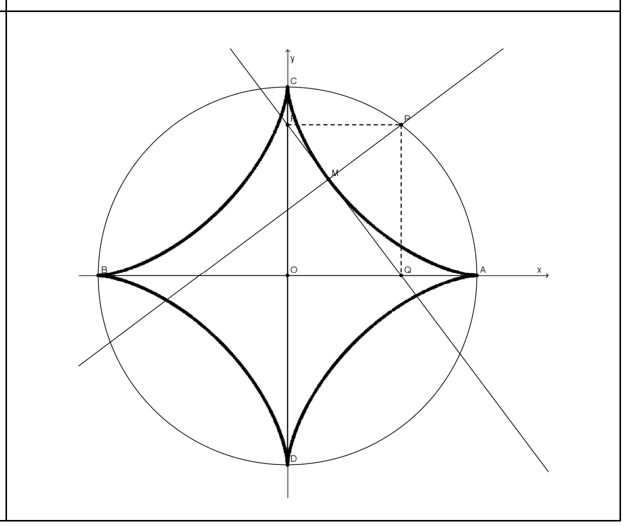
UAA 6 :

Lieux géométriques









Objectifs : Lieux géométriques — 6ème 6h

L'élève doit SAVOIR :

1. Définir "lieu géométrique".
2. Définir "parabole", "ellipse" et "hyperbole" et refaire la démarche pour établir leur équation.
3. Donner l'équation d'une conique et ses éléments caractéristiques (coordonnées des foyer(s), directrice(s), sommet(s), axe(s) de symétrie, asymptotes éventuelles) et établir ces équations et la représenter.
4. Donner la définition focale des coniques, préciser leur nature en fonction de la valeur de leur excentricité.
5. Enoncer et illustrer les propriétés optiques des coniques; refaire les démonstrations du cours.
6. Donner les différentes équations des tangentes aux coniques et refaire les démarches pour les établir.

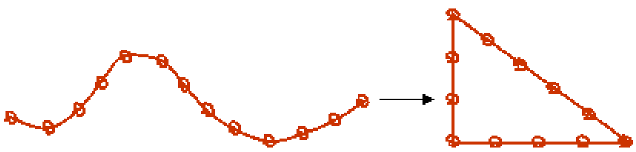
L'élève doit ETRE CAPABLE DE :

1. Déterminer l'équation d'un lieu géométrique, en préciser la nature et le représenter.
2. Représenter une conique, en utilisant notamment la construction à la règle et au compas.
3. Déterminer l'équation d'une conique vérifiant certaines conditions.
4. Donner les éléments caractéristiques (coordonnées des foyer(s), directrice(s), sommet(s), axe(s) de symétrie, asymptotes éventuelles) d'une conique à partir de son équation, en la réduisant éventuellement.
5. Déterminer l'équation d'une tangente à une conique.
6. Rechercher les points d'intersection entre une droite et une conique.
7. Utiliser les coniques pour résoudre des problèmes.

A. Lieux géométriques

Les origines de la géométrie remontent aux Babyloniens et aux Egyptiens (2000 ans avant notre ère). Le théorème dit «de Pythagore» est déjà connu dans des cas particuliers. Sur des tablettes babyloniennes, on a retrouvé des problèmes à caractère géométrique (calculs d'aires) dont la résolution passe par l'algèbre (équations du second degré).

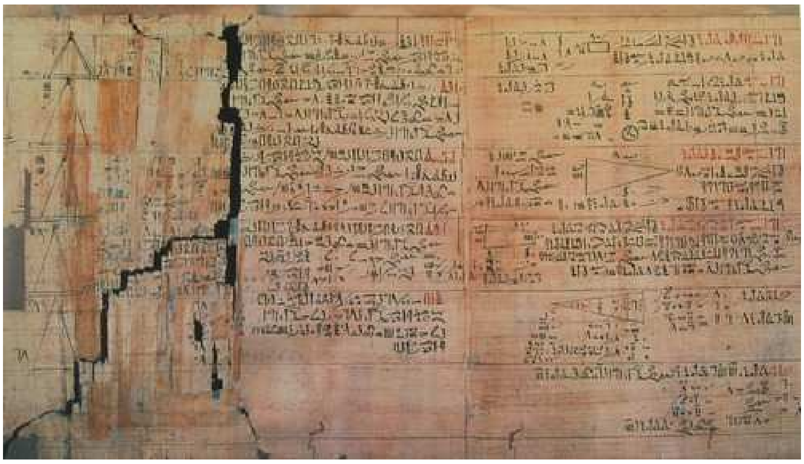
La géométrie naît des exigences de la vie pratique : architecture, fabrication et décoration d'objets, … Mais c'est aux crues répétées du Nil qu'on attribue les origines de la géométrie. Elles contraignent les arpenteurs égyptiens à retracer régulièrement les limites des propriétés agricoles afin de redistribuer les terrains de façon équitable.
Ces arpenteurs déterminent des longueurs, des surfaces divisées en rectangles, carrés et autres triangles. Ils utilisent la corde à 13 noeuds pour marquer les angles droits et sont ainsi nommés les *tendeurs de cordes*.



Pour l'historien grec *Hérodote* (-484 ; -425), la géométrie est un **don du Nil**. Il faut dire également qu'à cette époque et durant tout le Ier millénaire de notre ère, la géométrie se confond avec les mathématiques puisque tout problème mathématique passe, pour sa résolution, par des concepts et des représentations géométriques.

A cette époque, on sait calculer l'aire de quadrilatères (trapèzes, rectangles) ou de triangles isocèles mais les formules de calculs ne mènent qu'à des valeurs approchées.

C'est le scribe égyptien *Ahmès* qui par son *Papyrus Rhind* nous rapporte ces informations.



1. Définition

Définition : Un **lieu géométrique** est un ensemble de points qui satisfont tous une même propriété commune appelée propriété caractéristique.

Ce qui signifie que tous les points du lieu vérifient cette propriété et qu'ils sont les seuls.

Par exemples, le cercle est le lieu des points situés à une distance donnée r d'un point C. La médiatrice d'un segment est le lieu des points situés à égale distance des extrémités du segment.

La recherche d'un lieu géométrique peut être réalisée de différentes façons :

- par la méthode **synthétique** (qui utilise les définitions et les propriétés des figures) ;
- par les méthodes **analytiques** :
  - de **traduction** (consistant à choisir un repère et à traduire algébriquement la ou les conditions sur les points du lieu) ;
  - des **génératrices** (où le lieu géométrique est l'intersection de deux familles de courbes).

2. Méthode de traduction

Voici la marche à suivre :

- Si le repère n'est pas donné, on commence par choisir un repère (3 points non alignés fixes)
  - affine, si le problème ne comporte que des notions de points, de droites, d'appartenance, de parallélisme de droites ;
  - orthonormé, si le problème comporte des notions de distance, d'angle, de perpendicularité de droites.
- On traduit, dans le repère donné ou choisi, la propriété d'appartenance des points au lieu pour obtenir une équation cartésienne du lieu.
- On analyse l'équation trouvée pour dégager la nature du lieu (droite, cercle, parabole,...)

Exemple : On donne deux points fixes A et B. Déterminons le lieu des points qui sont 2 fois plus éloignés de B que de A.

3. Méthode des génératrices

Dans la méthode des génératrices, aussi appelée "méthode des deux lieux", on traduit le fait que tout point de la courbe appartient à deux "génératrices", droites ou courbes qui s'expriment en fonction d'un paramètre que l'on choisit : l'abscisse ou l'ordonnée d'un point variable, la pente d'une droite variable...
L'élimination du paramètre entre les deux équations conduit à une équation cartésienne qu'il faut analyser pour déterminer le lieu proprement dit.

Voici la marche à suivre :

- Si le repère n'est pas donné, on choisit un repère de la même manière que pour la méthode de traduction.

- On détermine, dans le repère donné ou choisi,
  - les coordonnées des points fixes (souvent à l'aide de lettres latines) ;
  - les coordonnées des points mobiles en fonction d'un ou de plusieurs paramètres (on utilise généralement les lettres grecques) ;
  - une équation cartésienne des génératrices G_1 et G_2 en fonction du (ou des) paramètre(s) : elles forment un système d'équations paramétriques du lieu demandé.
- Dans ce système, on élimine le (ou les) paramètre(s) pour obtenir une équation cartésienne du lieu.

Exemple : On donne deux points fixes A et B. Déterminons le lieu des points qui sont 2 fois plus éloignés de B que de A.

4. Exercices

1. Détermine le lieu des points du plan dont la somme des carrés de leurs distances à deux droites perpendiculaires est constante $(k>0)$.

2. Détermine le lieu des points du plan dont la somme des carrés des distances aux côtés d'un carré *PQRS* est 6 (le carré est de côté 2).

3. Soit $A(-1;-2)$ et $B(3;2)$. Représente et détermine le lieu des points P tels que les droites AP et BP soient perpendiculaires.

4. Détermine une équation du lieu des points dont le carré de la distance au point $A(-2;-5)$ est égale à 3 fois la distance à la droite $d \equiv 8x+15y-34=0$.

La distance du point $A(x_A;y_A)$ à la droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ se calcule par $d(A,d)=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. Représente et détermine le lieu des points du plan situés à une distance 1 de la droite $d \equiv 3x-4y+1=0$.

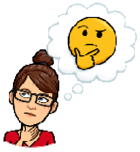
6. On donne deux points fixes $A(-1;0)$ et $B(1;0)$. Détermine le lieu des projections orthogonales de B sur les droites comprenant A. Représente ce lieu.

7. Détermine l'équation du lieu du sommet de l'angle droit du triangle rectangle dont l'hypoténuse est le segment défini par les points $A(0;2)$ et $B(3;2)$.

8. Soit ABC un triangle équilatéral. Détermine l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\overline{BC}$. Précise la nature de ce lieu.

9. Soit d une droite et F un point non situé sur cette droite. Par un point M de d, on construit la perpendiculaire p à d. Construis et détermine une équation du lieu des points d'intersection de p avec la médiatrice m du segment $[FM]$ lorsque M parcourt la droite d.

Pour chercher :



Pour tout nombre réel $m \neq 3$, on définit la fonction du second degré $p_m(x) = (m-3)x^2 - 2(m+2)x + m - 5$.

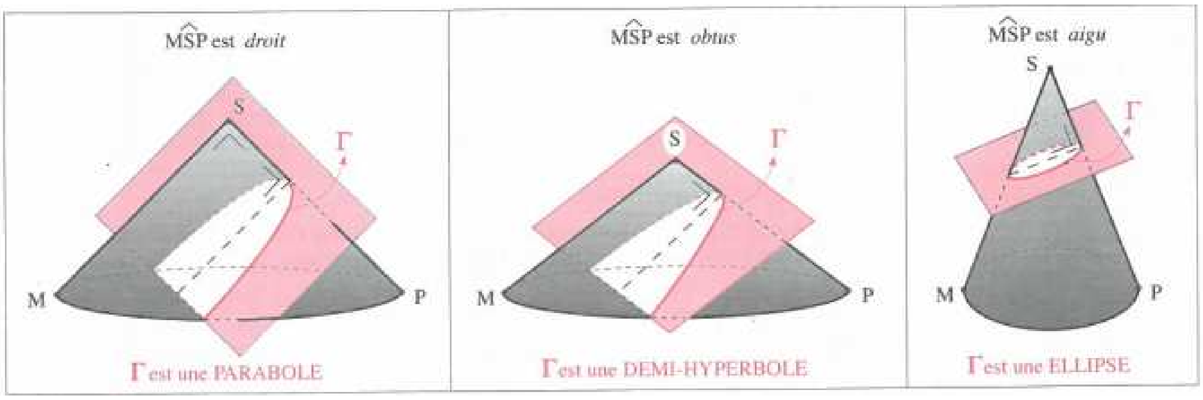
Détermine le lieu des sommets S_m de la parabole lorsque m parcourt $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

B. Les coniques

Dans la Grèce ancienne, l'oracle de Delos posa le problème de la duplication du cube : construire un cube dont le volume est double de celui d'un cube donné. Ce qui est impossible à la règle et au compas.

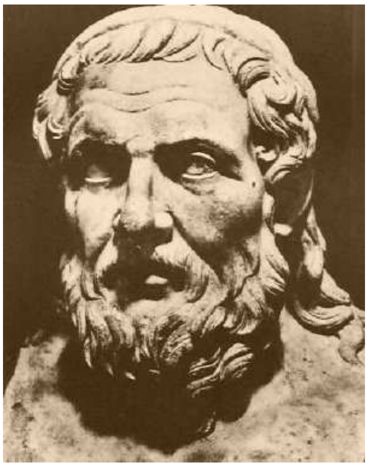
L'astronome et mathématicien **Ménechme** (vers 375-325 avant J.-C.) trouva la solution en inventant des courbes qui sont l'intersection d'un cône droit de révolution par un plan perpendiculaire à une génératrice.

Suivant l'angle au sommet du cône, il obtint trois sortes de sections coniques : la parabole, la (demi-)hyperbole et l'ellipse. On leur donna le nom générique de coniques.



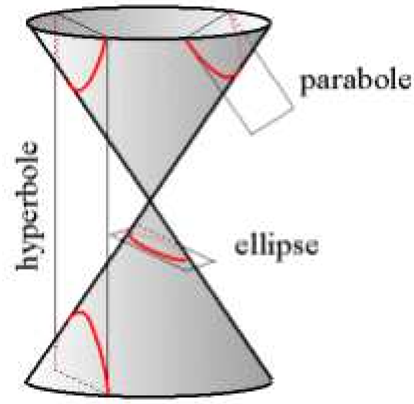
Pour construire un cube de côté x et de volume égal au double de celui d'un cube de côté k connu, il chercha l'intersection d'une hyperbole d'équation $y = \dfrac{k^2}{x}$ et de la parabole d'équation $y^2 = \dfrac{1}{2}kx$. En résolvant le système, il trouva $x^3 = 2k^3$; ce qui lui permit d'effectuer la construction demandée sans pour autant connaître les nombres irrationnels tels que $\sqrt[3]{2}$ ... ni, d'ailleurs, les équations de ces coniques.

Mathématicien et astronome grec, **Apollonius de Perge** (262 – 190 avant J.-C.), appelé le « Grand géomètre », s'illustra par les huit volumes de son oeuvre « Les sections coniques ».



Pour générer toutes les coniques, il eut l'idée de ne considérer qu'un seul cône circulaire droit ou un cône à double nappe. La nature de la section conique obtenue dépend alors de la direction du plan de section.

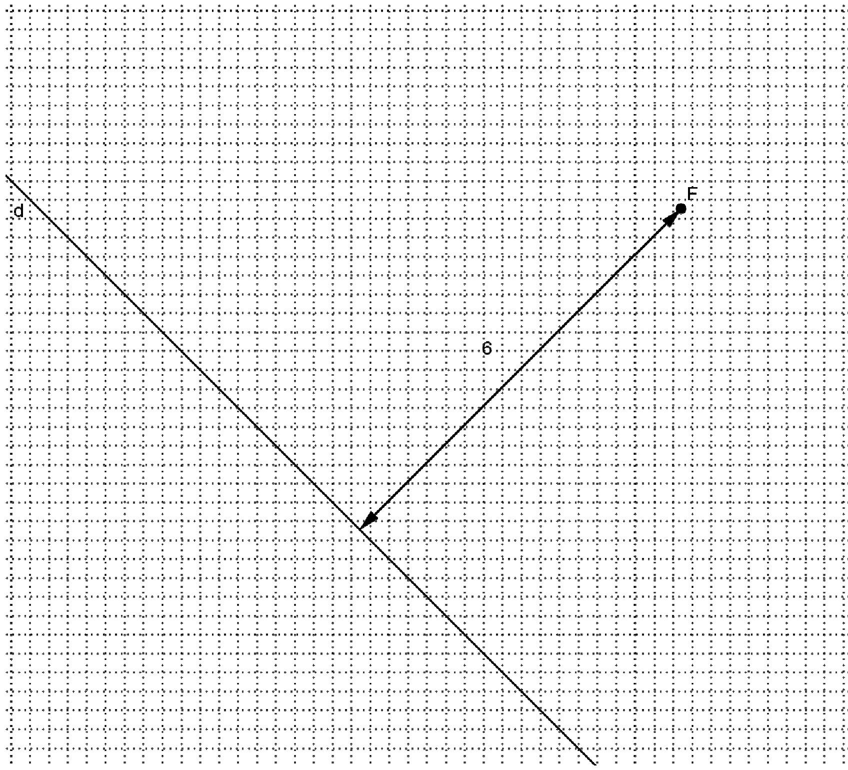
C'est lui aussi qui fut probablement le premier à baptiser les trois sortes de coniques : la parabole, l'hyperbole, l'ellipse (et le cercle).



1. La parabole

(1) Construction à la règle et au compas

Dans le plan, on donne le point F et la droite d, distants de 6 cm.



Tu dois déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points du plan dont **la distance à *F* égale la distance à *d*.**

Pour t'aider, on te propose de suivre les étapes suivantes :

1. Trace

en couleur	l'ensemble des points dont la distance à *d* est
noire	1
bleue	2
verte	3
orange	4
rouge	5

2. Trace

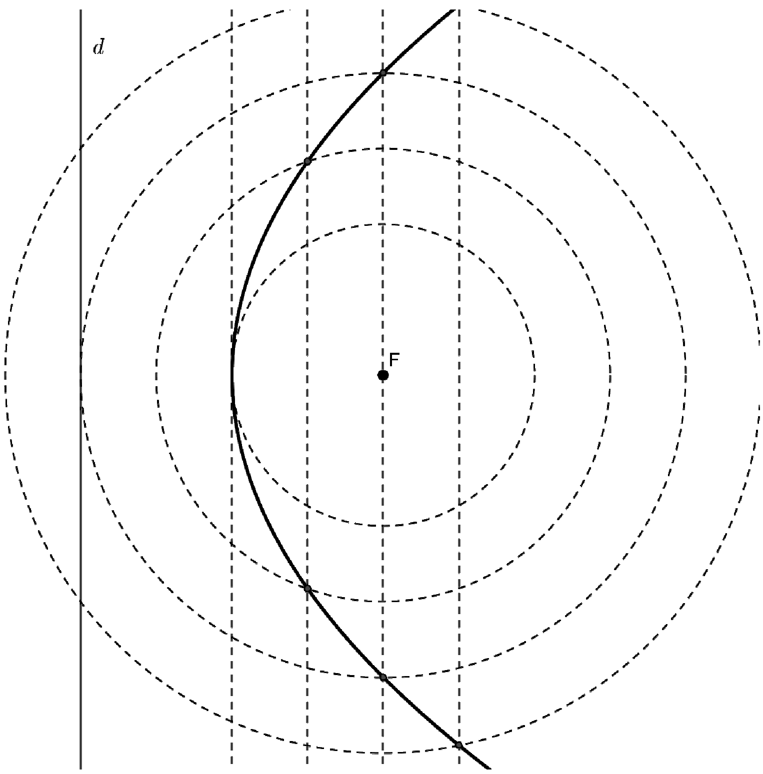
en couleur	l'ensemble des points dont la distance à *F* est
noire	1
bleue	2
verte	3
orange	4
rouge	5

3. Repère les points d'intersection des lignes de même couleur déterminées ci-dessus. Ils appartiennent à $\mathcal{P}$.

(2) Définition et équation cartésienne

Définition : Une **parabole** est le lieu des points du plan situés à égale distance d'une droite, appelée la **directrice**, et d'un point n'appartenant pas à cette droite, appelé le **foyer**.

Voici le graphique d'une parabole de foyer F et de directrice d avec $dist(F,d) = p > 0$, construite à la règle et au compas. Nous allons déterminer son équation.



Nous devons donc commencer par choisir un repère orthonormé :

- l'axe des abscisses est perpendiculaire à d et passe par F,
- l'axe des ordonnées est parallèle à d et situé à égale distance de F et de d.

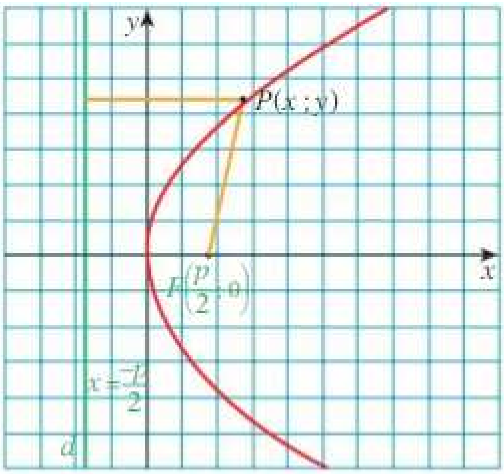
Dans ce repère, les coordonnées du foyer sont $F(......;......)$ et l'équation de la directrice est $d \equiv ....$

Soit $P(x;y)$ un point du plan.

Le point P appartient à la parabole si et seulement si

La parabole $\mathcal{P}$ de foyer $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ et de directrice $d \equiv x = -\frac{p}{2}$ a pour équation ....

(3) Caractéristiques de la parabole



Transformons l'équation de la parabole :

$y^2 = 2px \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2px}$

Ainsi, la parabole est l'union du graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{2px}$ et de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

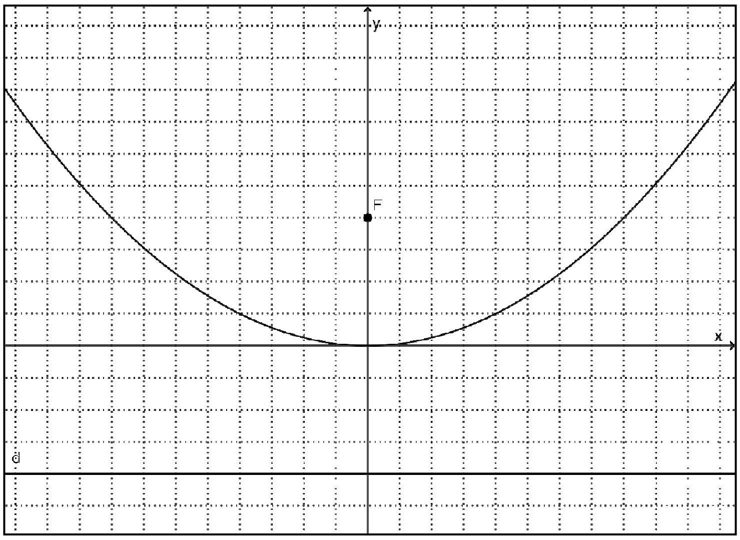
La parabole possède un axe de symétrie passant par le foyer et perpendiculaire à la directrice : on l'appelle l'**axe focal**.

Le point d'intersection entre la parabole et son axe de symétrie est le **sommet** de la parabole. Il s'agit du point le plus proche du foyer et de la directrice.

(4) Choix du repère

Si la directrice de la parabole est une droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses), l'équation de la parabole change.

En effet,



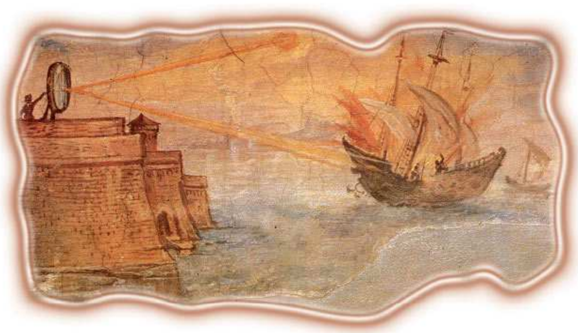
Le foyer a pour coordonnées $F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$ et la directrice a pour équation $d \equiv y = -\dfrac{p}{2}$.

On pourrait refaire toute la démarche précédente pour établir que l'équation de cette parabole est $x^2 = 2py$.

Le saviez-vous ?

En 2012 avant J.-C., la colonie grecque de Syracuse est attaquée par la flotte romaine.

Selon la légende romaine, Archimède aurait utilisé des miroirs paraboliques pour enflammer les bateaux ennemis avant qu'ils n'accostent.

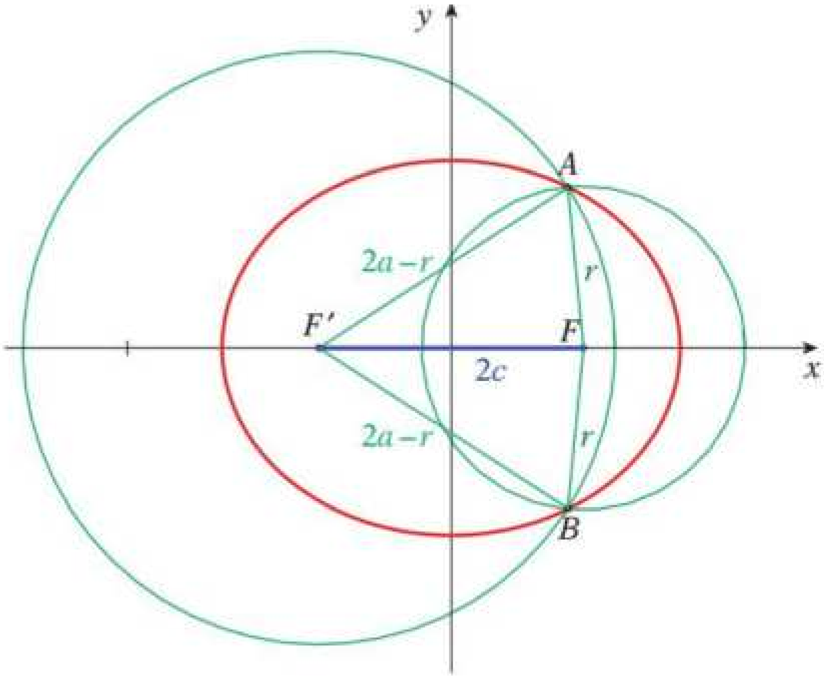


2. L'ellipse

(1) Définition et équation cartésienne

Définition : Une **ellipse** est le lieu des points du plan situés à des distances de deux points fixes F et F', appelés les **foyers**, dont la somme est constante.

Voici le graphique d'une ellipse de foyers F et F' avec $\overline{FF'} = 2c > 0$, et $2a > 0$ la constante égale à la somme des distances de n'importe quel point de l'ellipse à ses foyers (avec $a > c$), construite à la règle et au compas.



Les points A et B de l'ellipse se trouvent à la fois sur le cercle de centre F et de rayon r et sur le cercle de centre F' et de rayon $2a - r$.

Nous allons maintenant établir l'équation cartésienne de l'ellipse :

Nous devons donc commencer par choisir un repère orthonormé :

- l'axe des abscisses passe par F et F',
- l'axe des ordonnées est la médiatrice du segment $[FF']$

Dans ce repère, les coordonnées des foyers sont $F(......;......)$ et $F'(......;......)$.

Soit $P(x;y)$ un point du plan.

Le point P appartient à l'ellipse si et seulement si

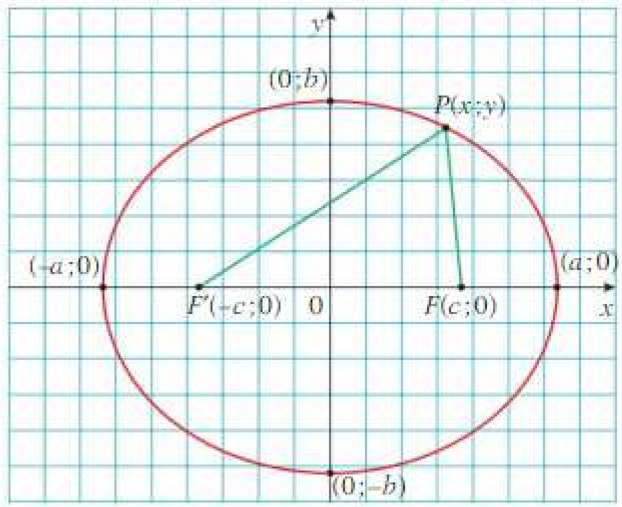
L'ellipse de foyers $F(c;0)$ et $F'(-c;0)$ dont les points se trouvent à des distances de F et F' dont la somme vaut $2a$ avec $a > c$ a pour équation .... avec ....

(2) Caractéristiques de l'ellipse

Transformons l'équation de l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Ainsi, l'ellipse est l'union du graphique de la fonction $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ et de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.



L'ellipse possède deux axes de symétrie : l'**<u>axe focal</u>** passant par les foyers et l'**<u>axe non focal</u>** qui est la médiatrice du segment $[FF']$.

Le point d'intersection des axes de symétrie est le **<u>centre</u>** de l'ellipse : c'est son centre de symétrie.

Les points d'intersection entre l'ellipse et ses axes de symétrie sont les sommets de l'ellipse. L'ellipse possède ainsi quatre sommets.

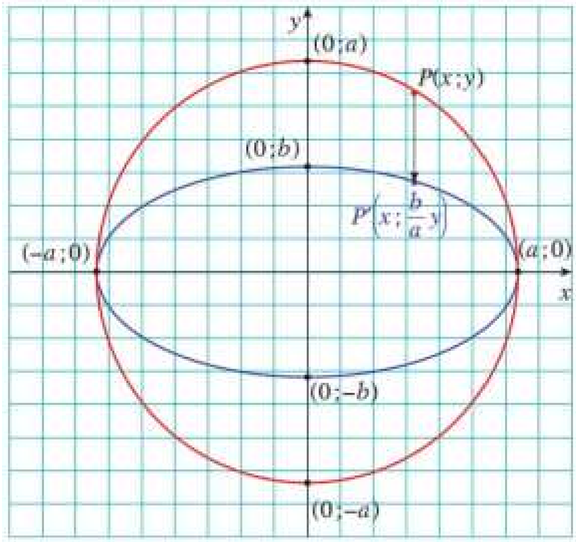
Les coordonnées des sommets de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sont $(a;0)$, $(-a;0)$, $(0;b)$ et $(0;-b)$.

Les équations des directrices sont $x=\frac{a^2}{c}$ et $x=-\frac{a^2}{c}$.

Les nombres strictement positifs *2a*, *2b* et *2c* sont appelés respectivement **<u>grand axe</u>**, **<u>petit axe</u>** et **<u>distance focale</u>** de l'ellipse.

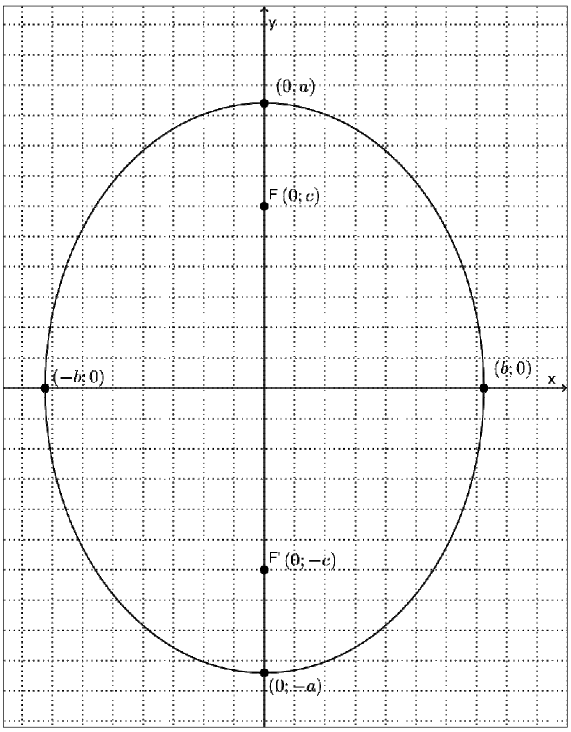
(3) Lien entre le cercle et l'ellipse

Toute ellipse est la transformée d'un cercle par une compression verticale. En effet, le graphe cartésien de la fonction f telle que $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ est obtenu en « aplatissant » celui de la fonction $g(x)=\sqrt{a^2-x^2}$.



Par ailleurs, si les foyers d'une ellipse sont confondus $(c=0)$, on a $a=b$ et l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ devient $x^2+y^2=a^2$ qui est l'équation du cercle de centre $C(0;0)$ et de rayon a.

(4) Choix du repère



Si les foyers de l'ellipse se situent sur l'axe des ordonnées, son équation change. En effet, les coordonnées des foyers sont $F(0;c)$ et $F'(0;-c)$. L'axe focal est l'axe des ordonnées.

Les coordonnées des sommets sont $(0;a)$, $(0;-a)$, $(b;0)$ et $(-b;0)$.

L'équation de l'ellipse est $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ avec $b^2=a^2-c^2$.

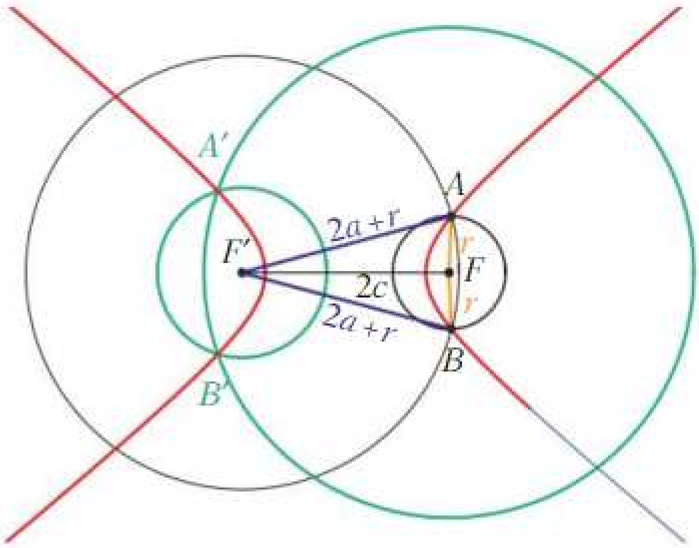
Les équations des directrices sont $y=\frac{a^2}{c}$ et $y=-\frac{a^2}{c}$.

3. L'hyperbole

(1) Définition et équation cartésienne

Définition : Une **hyperbole** est le lieu des points du plan situés à des distances de deux points fixes F et F', appelés les **foyers**, dont la valeur absolue de la différence est constante.

Voici le graphique d'une hyperbole de foyers F et F' avec $\overline{FF'} = 2c > 0$, et $2a > 0$ la constante égale à la valeur absolue de la différence des distances de n'importe quel point de l'hyperbole à ses foyers (avec $a > c$), construite à la règle et au compas.



Les points A et B de l'hyperbole se trouvent à la fois sur le cercle de centre F et de rayon r et sur le cercle de centre F' et de rayon $2a + r$.

Nous allons maintenant établir l'équation cartésienne de l'hyperbole :

Nous devons donc commencer par choisir un repère orthonormé :

- l'axe des abscisses passe par F et F',
- l'axe des ordonnées est la médiatrice du segment $[FF']$

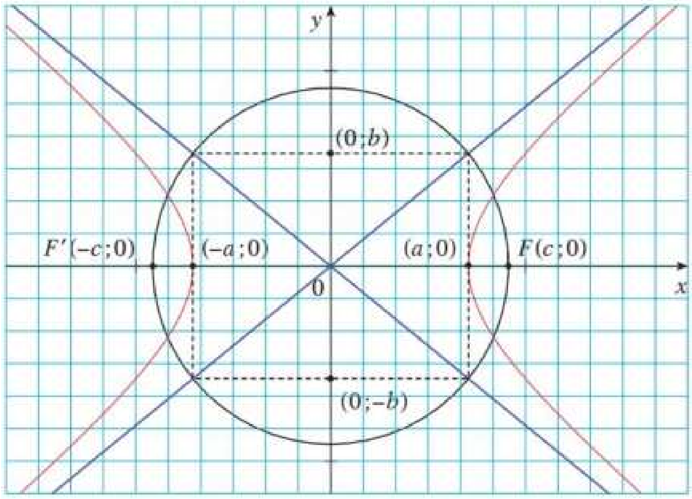
Dans ce repère, les coordonnées des foyers sont $F(......;......)$ et $F'(......;......)$.

Soit $P(x; y)$ un point du plan.

Le point P appartient à l'hyperbole si et seulement si

L'hyperbole de foyers $F(c;0)$ et $F'(-c;0)$ dont les points se trouvent à des distances de F et F' dont la valeur absolue de la différence vaut $2a$ avec $c > a$ a pour équation .... avec ....

(2) Caractéristiques de l'hyperbole



Transformons l'équation de l'hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Ainsi, l'hyperbole est l'union du graphique de la fonction $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ et de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

L'hyperbole possède deux axes de symétrie : l'**__axe focal__** passant par les foyers et l'**__axe non focal__** qui est la médiatrice du segment $[FF']$.

Le point d'intersection des axes de symétrie est le **__centre__** de l'hyperbole : c'est son centre de symétrie.

Les points d'intersection entre l'hyperbole et ses axes de symétrie sont les sommets de l'hyperbole. L'hyperbole possède ainsi deux sommets.

Les coordonnées des sommets de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ sont $(a;0)$ et $(-a;0)$.

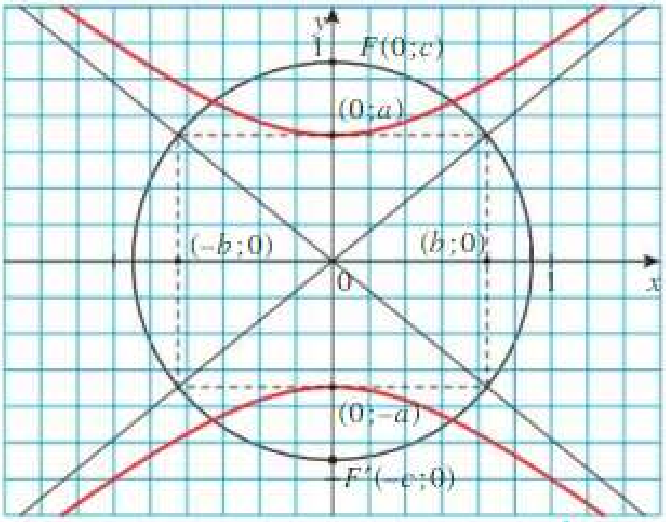
Les équations des directrices sont $x=\frac{a^2}{c}$ et $x=-\frac{a^2}{c}$.

De plus, l'hyperbole possède deux asymptotes passant par son centre dont les équations sont $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$.

L'hyperbole est constituée de deux parties, appelées **branches** de l'hyperbole.

(3) Choix du repère

Si les foyers de l'hyperbole se situent sur l'axe des ordonnées, son équation change. En effet,



Les coordonnées des foyers sont $F(0;c)$ et $F'(0;-c)$. L'axe focal est l'axe des ordonnées.

Les coordonnées des sommets sont $(0;a)$ et $(0;-a)$ et les asymptotes ont pour équation $x=\dfrac{b}{a}y$ et $x=-\dfrac{b}{a}y$.

L'équation de l'hyperbole est $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ avec $b^2=c^2-a^2$.

Les équations des directrices sont $y=\dfrac{a^2}{c}$ et $y=-\dfrac{a^2}{c}$.

4. Caractéristiques communes des coniques

(1) Définition focale

Toutes les coniques, sauf le cercle, peuvent être définies de manière unique. On parle alors de la définition focale :

> On donne un nombre réel ε strictement positif
> et une droite d et un point F n'appartenant pas à d.
> Une conique est le lieu géométrique des points M du plan tels que le rapport de la distance du point F à la droite d égale ε.

Ce nombre ε est l'**excentricité** de la conique, elle se calcule par le rapport $\frac{c}{a}$. On reconnaît en F le foyer et en la droite d la directrice, son équation est $x = \frac{a^2}{c}$.

Lorsque $\varepsilon = 1$, on retrouve la parabole.
Si $0 < \varepsilon < 1$, la conique est une ellipse.
Et pour $\varepsilon > 1$, la conique est une hyperbole.

L'expression **conique centrée** désigne une ellipse ou une hyperbole car elles ont un centre de symétrie ; les paraboles sont des coniques non centrées.

Si, dans un repère orthonormé, on fournit le foyer d'une conique, sa directrice et son excentricté, on peut en déterminer une équation cartésienne. Cette équation peut alors s'écrire sous la forme générale

$$mx^2 + ny^2 + q\,xy + r\,x + s\,y + t = 0 \text{ où } m,n,q,r,s,t \in \mathbb{R} \text{ et } (m;n;q) \neq (0;0;0) \;.$$

(2) Réduire l'équation d'une conique

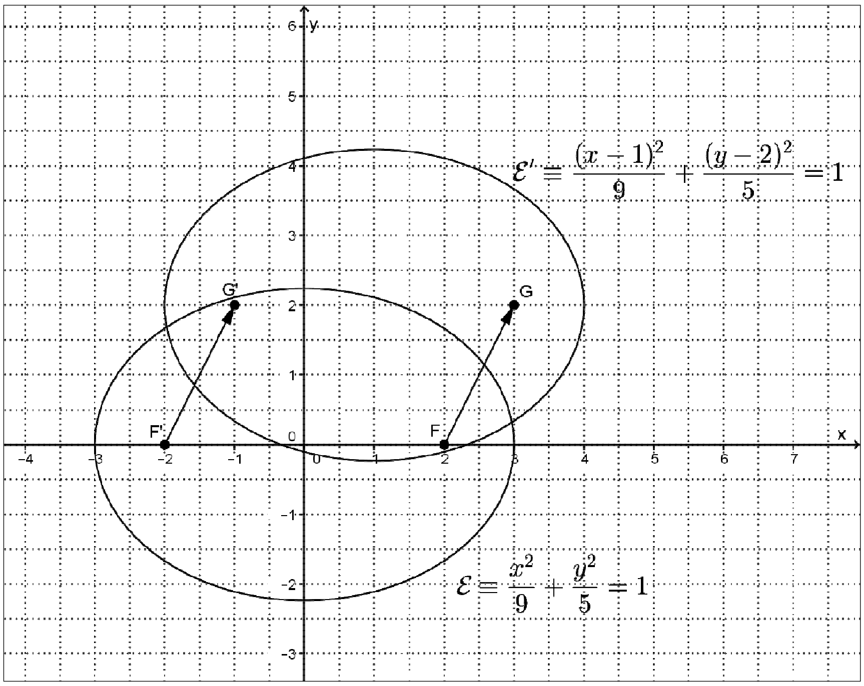
Dans les pages précédentes, nous avions choisi un repère adapté aux caractéristiques des coniques : les axes de coordoonnées coïncidaient avec les axes de symétrie.

Dans un repère orthonormé quelconque, l'équation générale d'une conique $mx^2 + ny^2 + q\,xy + r\,x + s\,y + t = 0$ ne permet pas de déterminer aisément la nature et les caractéristiques de la conique.

Pour résoudre le problème, on passe du repère initial à un repère adapté à l'étude de la conique. Cette opération s'appelle **réduction de la conique**.

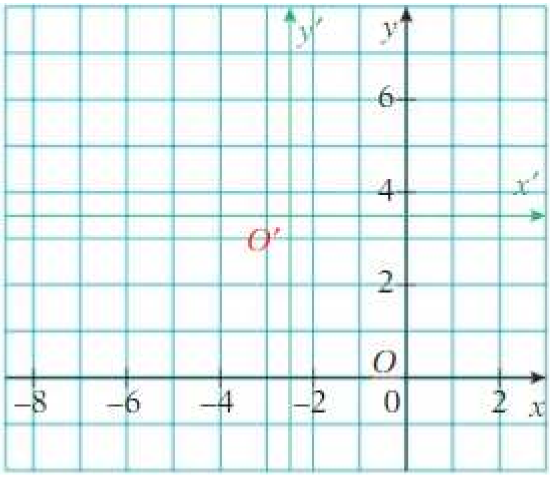
Nous nous limiterons aux cas où le changement de repère peut être réalisé par une translation : les axes du nouveau repère sont parallèles à ceux du repère initial et orientés de la même façon. En pratique, on reconnaît cette situation lorsque l'équation générale de la conique ne contient pas de terme en *xy*.

Exemple :



Exemple : (1) Transformons l'équation $16x^2 - 36y^2 + 80x + 252y - 197 = 0$ pour préciser la nature de la conique et donner ses caractéristiques.

(2) Changement de repère : passage du repère R_1 d'origine $O(0;0)$ à un repère R_2 d'origine $O'\left(-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ par translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.



Si $(x;y)$ sont les coordonnées d'un point P dans le repère R_1, ses coordonnées dans le repère R_2 sont $(x';y')$ avec $\begin{cases} x' = x+\frac{5}{2} \\ y' = y-\frac{7}{2} \end{cases}$.

(3) Equation de la conique dans le repère R_2 : ....

(4) Nature et caractéristiques de la conique :

Dans le repère R_1 (centré à l'origine)	Dans le repère R_2
•	• ....
....	....
• $a = ..., b = ..., c = ...$	• $a = ..., b = ..., c = ...$
• foyers :	• foyers : ....
• directrices :	• directrices : ....
• excentricité :	• excentricité : ....
• sommets :	• sommets : ....
• asymptotes :	• asymptotes : ....

5. Exercices

1. Les équations suivantes définissent-elles une conique ? Si oui, précise sa nature, détermine ses éléments caractéristiques (foyer(s), directrice(s), excentricité, sommet(s), asymptotes éventuelles) et représente cette conique.
   (1) $9x^2+16y^2+144=0$
   (2) $9x^2+16y^2-144=0$
   (3) $x^2-2y=0$
   (4) $x^2+2x=0$
   (5) $x^2+y^2-6x-8y=0$
   (6) $x^2-y^2-6x-8y-32=0$
   (7) $9x^2-16y^2-18x-32y+164=0$
   (8) $x^2+6x-6y+3=0$
   (9) $y^2-6x-6y+15=0$
   (10) $y=-3\pm\frac{2}{7}\sqrt{6-x-x^2}$

2. Détermine une équation cartésienne des coniques suivantes, précise la nature des coniques centrées (ellipse, hyperbole) et les caractéristiques manquantes (foyer(s), directrice(s), excentricité, sommet(s), asymptotes éventuelles).

   (1) Parabole de foyer $F(3;0)$ et de directrice $d\equiv x=-3$.
   (2) Conique centrée à l'origine de sommet $S(5;0)$ et de foyer $F(4;0)$.
   (3) Conique centrée à l'origine, d'axe focale *Ox*, de distance focale $\overline{FF'}=12$ et d'excentricité $\varepsilon=0,6$.
   (4) Conique centrée à l'origine de sommet $S(5;0)$ et de foyer $F(0;4)$.
   (5) Parabole dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des abscisses, dont le sommet est le point $S(2;1)$ et le foyer $F(4;1)$.
   (6) Conique centrée à l'origine d'excentricité $\varepsilon=0,5$ et dont la distance entre les directrices vaut 20, d'axe focal *Oy*.

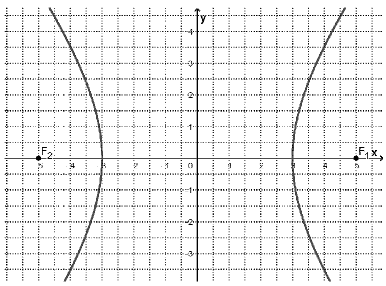
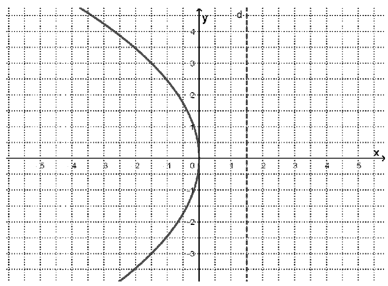
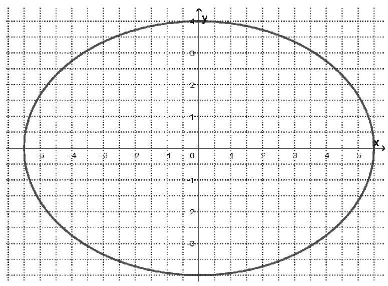
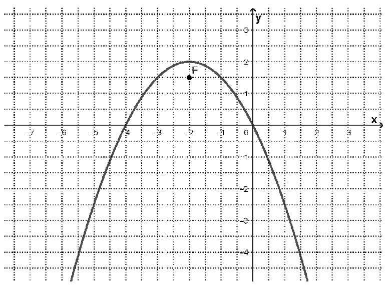
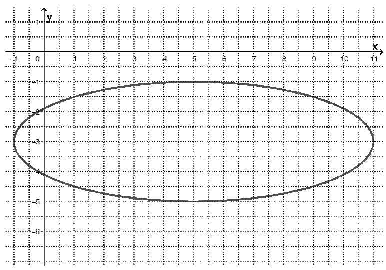
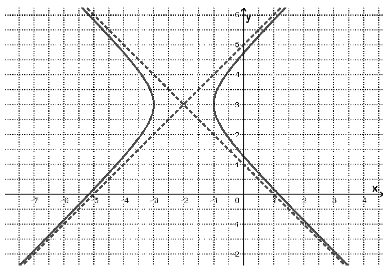
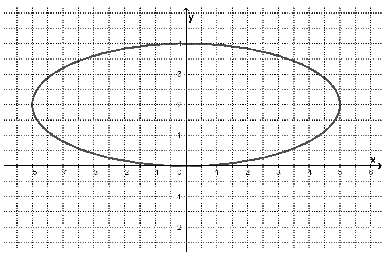
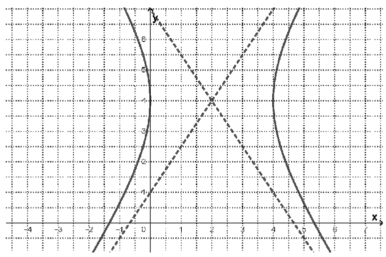
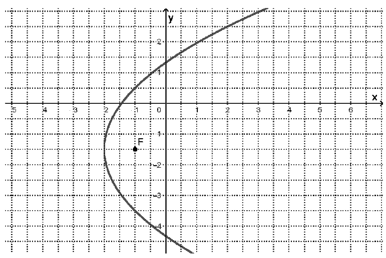
(7) Parabole dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des ordonnées, dont le sommet est le point $S(2;1)$ et passant par le point $P(0;4)$.

(8) Conique centrée à l'origine, d'axe focal *Oy*, de foyer $F(0;5)$ et d'asymptote d'équation $3x+4y=0$.

(9) Conique centrée à l'origine, d'axe focal *Ox*, dont la distance entre les sommets vaut 8 et d'excentricité $\varepsilon = 1,25$.

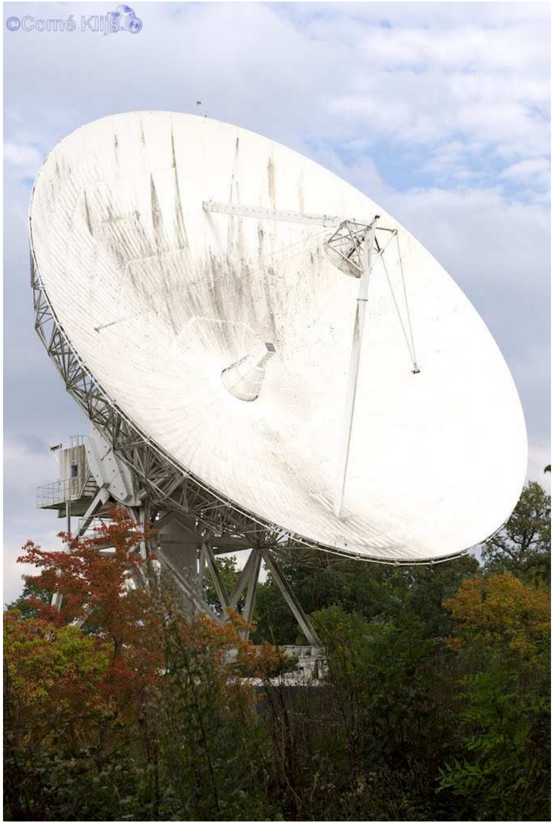
(10) Conique centrée à l'origine de sommets $S(5;0)$ et $S'(0;4)$.

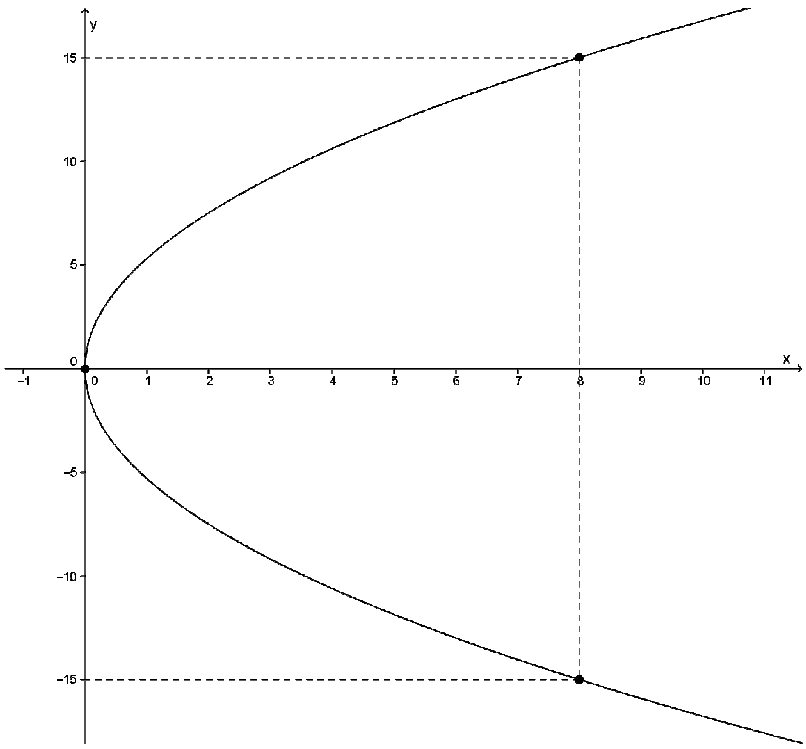
3. Détermine la nature, l'équation cartésienne et l'excentricité des coniques suivantes :

(1) 	(2) 	(3) 
(4) 	(5) 	(6) 
(7) 	(8) 	(9) 

4. A la station terrienne de télécommunications à Lessive, située près de Rochefort, la plus ancienne antenne a la forme d'un paraboloïde de révolution, surface de l'espace engendrée par la rotation d'une parabole autour de son axe. Son diamètre mesure 30 m et sa profondeur 8 m.

   Etablis l'équation cartésienne de la parabole. Donne ensuite les coordonnées de son foyer.





5. Recherche les coordonnées des éventuels points d'intersection :
   (1) entre la conique centrée à l'origine de sommets $S(5;0)$ et $S'(0\ ;\ 3,75)$ et la droite coupant les axes aux points $A(6;0)$ et $B(0;6)$;
   (2) entre la parabole dont le sommet est l'origine des axes, dont l'axe des abscisses est l'axe focal et passant par le point $P(-1;2)$ et la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(1;3)$ et $B(-2;4)$;
   (3) entre la conique centrée à l'origine, d'excentricité $\varepsilon = 2$ et de foyer $F(0;6)$ et les hauteurs du triangle ABC avec $A(-1;0)$, $B(0;2)$ et $C(3;-1)$.

6. Applications

(1) Tangente en un point d'une conique

Calculons une équation de la tangente à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ au point P de coordonnées $(x_P; y_P)$.

La tangente à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en un de ses points $P(x_P; y_P)$ est la droite d'équation $T \equiv \frac{x_P x}{a^2}+\frac{y_P y}{b^2}=1$.

Un raisonnement analogue conduit à l'équation de la tangente en un point de l'hyperbole ou de la parabole :

La tangente à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ en un de ses points $P\left(x_P\,;y_P\right)$ est la droite d'équation $T\equiv\frac{x_P x}{a^2}-\frac{y_P y}{b^2}=1$.

La tangente à la parabole d'équation $y^2=2px$ en un de ses points $P\left(x_P\,;y_P\right)$ est la droite d'équation $T\equiv y_P y=p\left(x+x_P\right)$.

(2) Tangentes de pente donnée

Calculons les éventuelles tangentes à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dont la pente *m* est donnée $\left(m\in\mathbb{R}\right)$.

Parmi les tangentes $T\equiv\frac{x_P x}{a^2}-\frac{y_P y}{b^2}=1$, avec $\frac{{x_P}^2}{a^2}-\frac{{y_P}^2}{b^2}=1$, il s'agit de déterminer celles pour lesquelles la pente vaut *m*, c'est-à-dire de déterminer les points $P\left(x_P\,;y_P\right)$ qui vérifient les conditions $\frac{{x_P}^2}{a^2}-\frac{{y_P}^2}{b^2}=1$ et $\frac{b^2 x_P}{a^2 y_P}=m$.

Si $a^2m^2 - b^2 > 0$, l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet deux tangentes de pente *m*, d'équations $y = mx \mp \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ et de points de tangence $P\left(\pm \dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}} ; \pm \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}} \right)$.

En effectuant un raisonnement analogue pour l'ellipse et la parabole, on a :

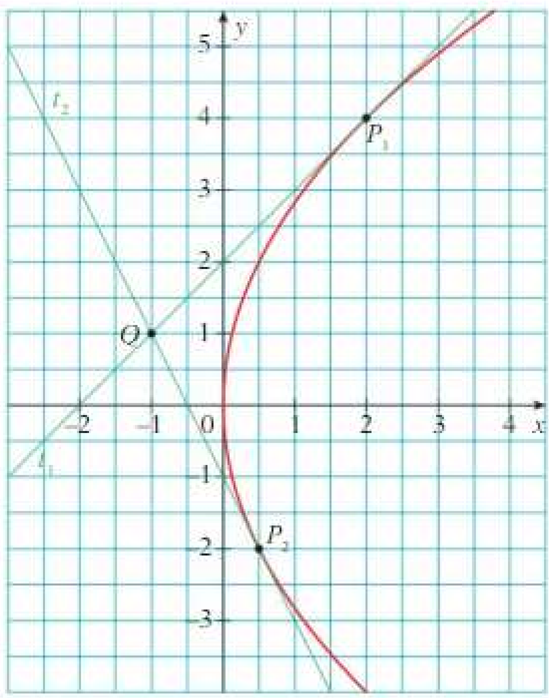
L'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet deux tangentes de pente *m*, d'équations $y = mx \mp \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ et de points de tangence $P\left(\pm \dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}} ; \mp \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}} \right)$.

Si $m \neq 0$, la parabole d'équation $y^2 = 2px$ admet une tangente de pente *m*, d'équation $y = mx + \dfrac{p}{2m}$ et de point de tangence $P\left(\dfrac{p}{2m^2} ; \dfrac{p}{m} \right)$.

(3) Tangentes issues d'un point

Soit $Q\left(x_Q\,;y_Q\right)$ un point du plan. Pour déterminer l'équation des éventuelles tangentes à une conique donnée issues du point Q, il suffit de rechercher les points $P\left(x_P\,;y_P\right)$ de la conique pour lesquels la tangente à la conique passe par le point $Q\left(x_Q\,;y_Q\right)$.

<u>Exemple :</u> Déterminons l'équation des tangentes à la conique d'équation $y^2 = 8x$ issues du point $Q(-1;1)$.



(4) Exercices

1. Dans chacune des situations suivantes, détermine l'équation cartésienne des tangentes à la conique vérifiant la condition donnée. Détermine également les coordonnées des points de tangence.
   (1) Tangente(s) à la conique $C \equiv 16x^2 + 9y^2 = 25$ au point $P(1;-1)$.
   (2) Tangente(s) à la conique $C \equiv x^2 - 3y^2 = 4$ parallèle(s) à la droite $d \equiv y = 2x$.
   (3) Tangente(s) à la conique $C \equiv y^2 - x^2 = 1$ parallèle(s) à la droite $d \equiv y = 2x$.
   (4) Tangente(s) à la conique $C \equiv y^2 = 4x$ issue(s) du point $Q(1;-1)$.
2. Détermine la (ou les) valeur(s) du paramètre $k \in$ ¡ pour laquelle (lesquelles) la droite d est tangente à la conique C et détermine les coordonnées du (des) point(s) de tangence dans chacun des cas suivants :
   (1) $d \equiv kx + y - 4 = 0$ et $C \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$
   (2) $d \equiv 13x - 7ky - 25 = 0$ et $C \equiv x^2 - ky^2 = 25$
   (3) $d \equiv 2x - y - 2k - 1 = 0$ et $C \equiv x^2 - y - 2kx + k^2 = 0$
   (4) $d \equiv x - y - 3 = 0$ et $C \equiv x^2 - ky^2 = 3k$

(5) Propriétés optiques

<u>Propriété préparatoire :</u> L'angle aigu α formé par les droites a et b est donné par la formule $\tan\alpha = \left|\dfrac{m_a - m_b}{1 + m_a . m_b}\right|$ où m_a et m_b sont les pentes respectives de a et b.

<u>Démonstration :</u>

Propriété optique de la parabole :

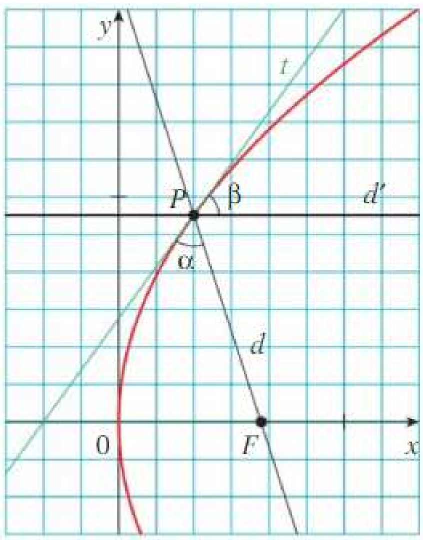
Dans un miroir parabolique,

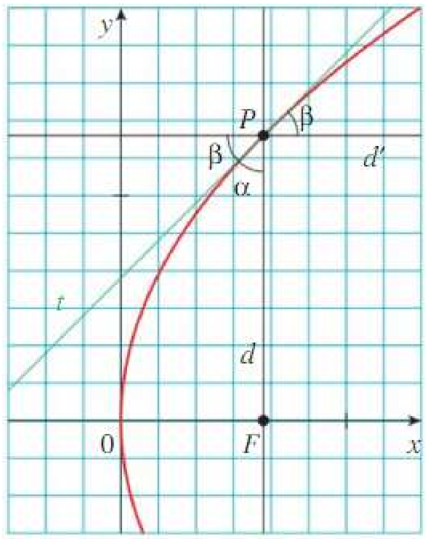
- tout rayon lumineux parallèle à l'axe de symétrie de la parabole est réfléchi par ce miroir en direction du foyer de la parabole « section »
- tout rayon lumineux issu du foyer de la parabole est réfléchi par ce miroir parallèlement à l'axe de symétrie de la parabole.

Autrement dit,

La droite joignant un point quelconque d'une parabole à son foyer et la droite passant par ce point parallèle à l'axe de cette parabole forment des angles aigus de même amplitude avec la tangente à la parabole en ce point.

Démonstration :





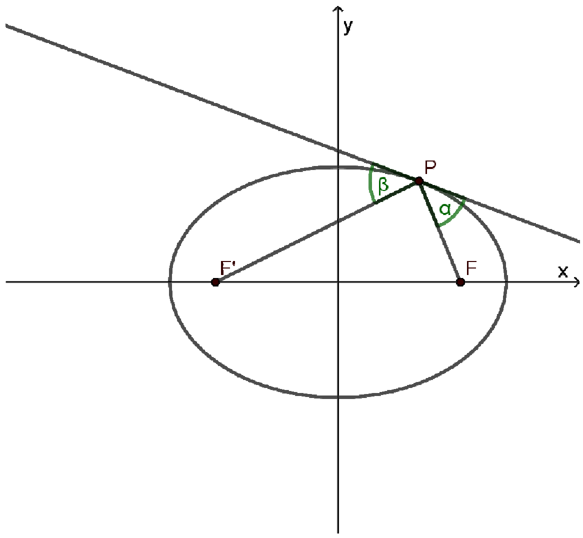
Cette propriété optique de la parabole est utilisée, par exemple, dans la fabrication des projecteurs, spots et des phares automobiles.

<u>Propriété optique de l'ellipse :</u>
Dans un miroir elliptique, tout rayon lumineux issu d'un foyer de l'ellipse est réfléchi par ce miroir selon une droite qui passe par l'autre foyer.

Autrement dit,

Les droites joignant un point quelconque d'une ellipse à ses foyers forment des angles aigus de même amplitude avec la tangente à l'ellipse en ce point.

Démonstration :



Propriété optique de l'hyperbole :

Dans un miroir hyperbolique, tout rayon lumineux issu d'un foyer de l'hyperbole est réfléchi par ce miroir selon une droite qui passe par l'autre foyer.

Autrement dit,

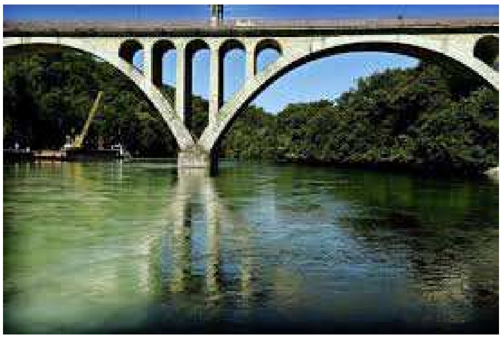
Les droites joignant un point quelconque d'une hyperbole à ses foyers forment des angles aigus de même amplitude avec la tangente à l'hyperbole en ce point.

La démonstration est analogue à celle de la propriété de l'ellipse et est laissée à titre d'exercice.

(6) Applications variées

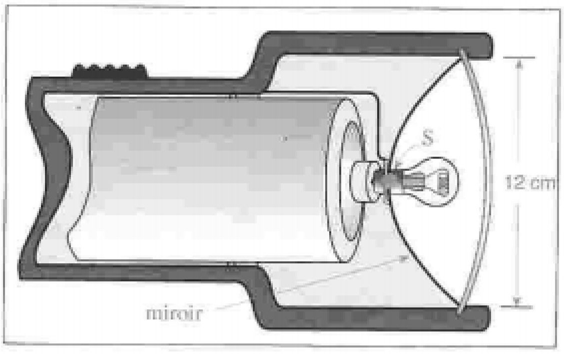
1. Détermine le point de la conique $y^2 - 4x = 0$ le plus proche de la droite $d \equiv x + y + 8 = 0$.

2. L'arche d'un pont a la forme d'une parabole : sa longueur est de 36 mètres et sa hauteur maximale est de 7, 6 mètres.
   Un voilier de 5 mètres de haut doit passer sous le pont. De quelle distance peut-il s'écarter du milieu pour franchir le pont ?



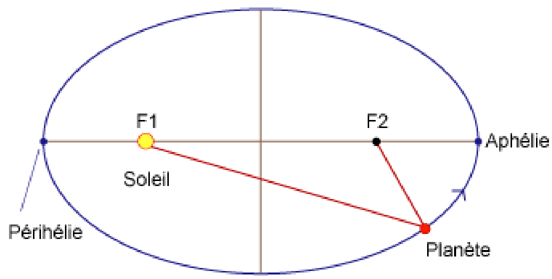
3. Conique et calcul intégral
   (1) Détermine la formule de l'aire d'une ellipse.
   (2) On appelle ellipsoïde de révolution le solide engendré par la rotation d'une ellipse autour d'un de ses axes de symétrie. Détermine la formule du volume de l'ellipsoïde de révolution.

4. Le miroir d'une torche électrique a la forme d'un paraboloïde de révolution de 12 cm de diamètre et de 3 cm de profondeur. Où faut-il placer l'ampoule pour que les rayons lumineux émis soient réfléchis parallèlement à l'axe du paraboloïde ? A quelle distance du point S ?

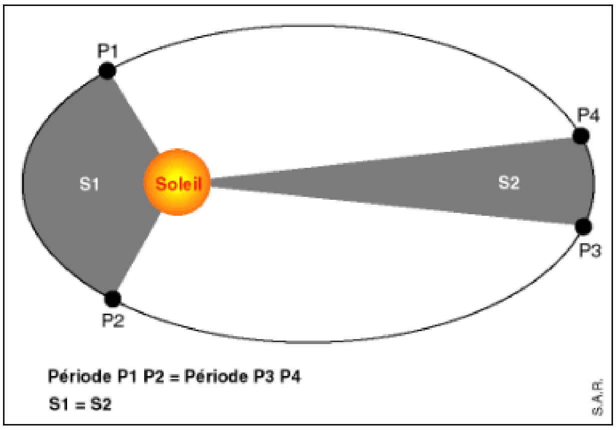


5. Lois de Kepler (1571-1630)
Les objets gravitant autour du Soleil (principalement les planètes et les comètes) ont des orbites décrites par les trois lois de Kepler, dont la démonstration repose sur la loi de la gravitation universelle de Newton (1643-1727).

- Loi des orbites : les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.



- Loi des aires : le rayon Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.



- Loi des périodes : le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi grand axe de l'orbite.

La plupart des orbites des planètes sont quasiment circulaires : leurs excentricités sont proches de 0.

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Excentricité	0,206	0,007	0,017	0,093	0,048	0,054	0,047	0,009

De nombreuses comètes ont des orbites elliptiques dont le Soleil occupe un de ses foyers. Dans ce cas, l'orbite est très aplatie et l'excentricité est proche de 1.

En astronomie, on utilise souvent l'unité astronomique (UA) comme unité de distance, qui représente la distance moyenne entre la Terre et le Soleil, soit 149.597.870.700 m.

(1) La Terre décrit une trajectoire elliptique autour du Soleil, ce dernier occupant un des foyers de l'ellipse. Le grand axe de cette orbite mesure 297 600 000 km et l'excentricité vaut 0,017.
Calcule, à 1000 km près, les distances maximale et minimale entre la Terre et le Soleil.

(2) La comète de Halley a une orbite elliptique d'excentricité $\varepsilon = 0,967$. Le point de sa trajectoire le plus proche du Soleil se trouve à une distance de 0,587 UA de celui-ci. Quelle est la distance maximale entre le Soleil et la comète de Halley ?

(3) La planète Mercure parcourt autour du Soleil une orbite elliptique dont le grand axe a une longueur de 0,774 UA. Calcule les distances maximale et minimale entre le Soleil et la planète Mercure.

(4) Une comète se déplace selon une orbite parabole dont le Soleil est le foyer. Quand la comète se trouve à 40 millions de kilomètres du Soleil, la droite passant par le Soleil et la comète fait avec l'axe de la parabole un angle de 60°. Quelle sera la plus courte distance entre la comète et le Soleil ?

6. Soit P la parabole d'équation $x^2 = 2py$, A un point variable de P d'abscisse $\lambda \neq 0$ et B un point variable de l'axe des abscisses d'abscisse μ .

   Quelle relation doivent vérifier λ et μ pour que la droite AB soit tangente à la parabole ? *(ULB, Septembre 2015)*

7. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $C(2;0)$ et de rayon 1. Soit $\mathscr{D}$ un cercle variable tangent extérieurement à $\mathscr{C}$ et passant par O.

   Détermine la nature et une équation du lieu parcouru par le centre D de $\mathscr{D}$. *(ULB, Juillet 2016)*