1. Précise la nature de chaque conique, détermine ses éléments caractéristiques (foyer(s), directrice(s), excentricité, sommet(s), asymptotes éventuelles) et représente cette conique.

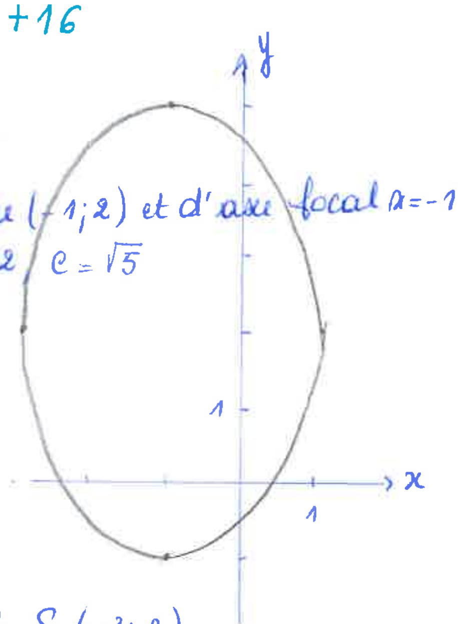
(1) $9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$

$\Leftrightarrow 9.(x^2+2x+1)+4.(y^2-4y+4)=11+9+16$

$\Leftrightarrow 9.(x+1)^2+4.(y-2)^2=36$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ → Ellipse de centre $(-1;2)$ et d'axe focal $x=-1$

$a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{5}$



Foyers : $F(-1;\sqrt{5}+2)$ et $F'(-1;-\sqrt{5}+2)$

Directrices : $y=\pm\dfrac{9\sqrt{5}}{5}+2$

Excentricité : $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Sommets : $S(-1;5)$, $S'(-1;-1)$, $S_1(1;2)$ et $S_2(-3;2)$

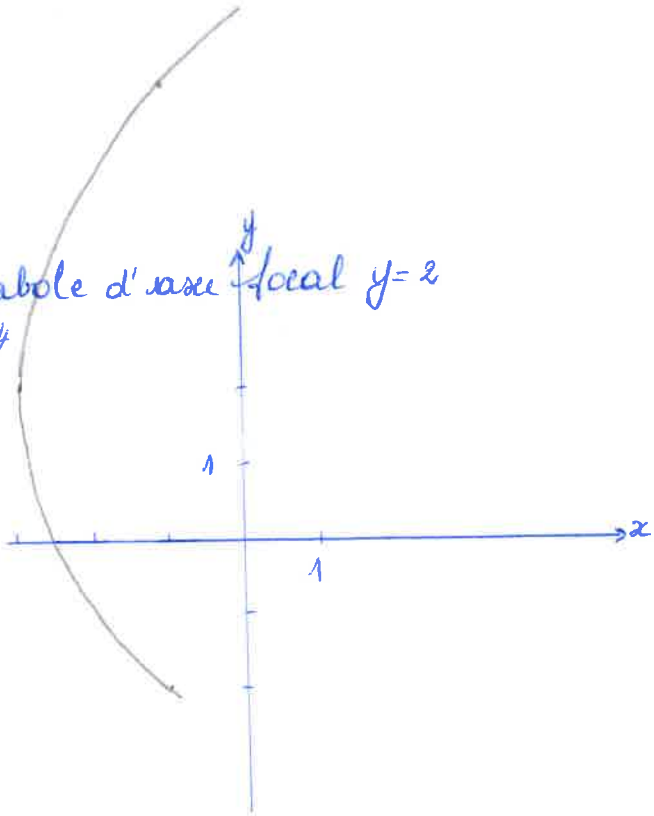
Asymptote : aucune

(2) $y^2-8x-4y+20=0$

$y^2-4y+4=8.x+20+4$

$(y-2)^2=8.(x+3)$ → Parabole d'axe focal $y=2$

$p=4$



Foyer : $F(-1;2)$

Directrice : $x=-5$

Excentricité : $\varepsilon=1$

Sommet : $(-3;2)$

Asymptote : aucune

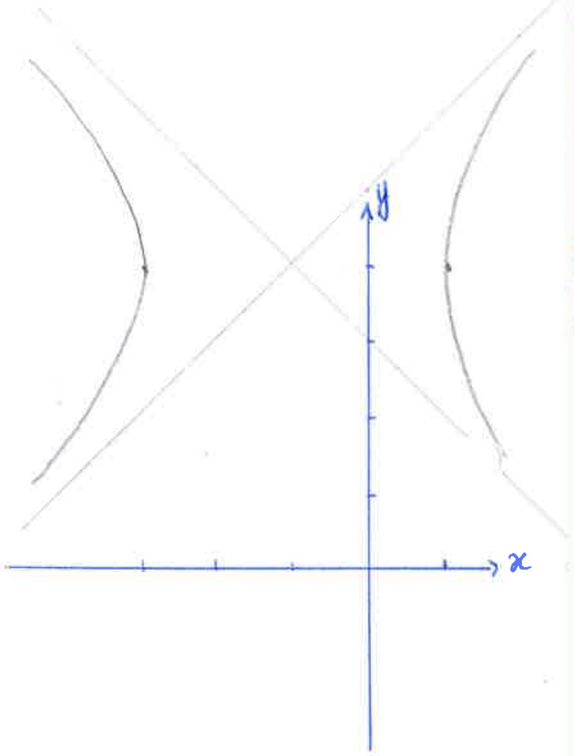
(3) $x^2 - y^2 + 2x + 8y - 19 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - (y^2 - 8y + 16) = 19 + 1 - 16$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (y-4)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1$

Hyperbole de centre $(-1;4)$
et d'axe focal $y=4$
$a=2$, $b=2$ et $c=2\sqrt{2}$



Foyers : $F(2\sqrt{2}-1;4)$ et $F'(-2\sqrt{2}-1;4)$

Directrices : $x = \pm\sqrt{2} - 1$

Excentricité : $\varepsilon = \sqrt{2}$

Sommets : $S(1;4)$ et $S'(-3;4)$

Asymptotes : $y = x+5$ $\left(y-4 = \frac{2}{2}\cdot(x+1)\right)$
et $y = -x+3$ $\left(y-4 = -\frac{2}{2}(x+1)\right)$

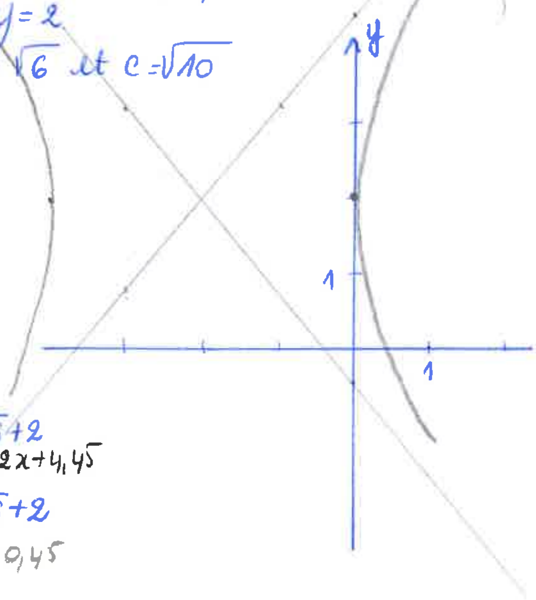
(4) $3x^2 - 2y^2 + 12x + 8y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 3\cdot(x^2 + 4x + 4) - 2\cdot(y^2 - 4y + 4) = 8 + 12 - 8$

$\Leftrightarrow 3(x+2)^2 - 2\cdot(y-2)^2 = 12$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{6} = 1 \longrightarrow$ Hyperbole de centre $(-2;2)$ et d'axe focal $y=2$

$a=2$, $b=\sqrt{6}$ et $c=\sqrt{10}$



Foyers : $F(\sqrt{10}-2;\ 2)$ et $F'(-\sqrt{10}-2;2)$

Directrices : $x = \dfrac{\pm 4}{\sqrt{10}} - 2 = \pm\dfrac{2\sqrt{10}}{5} - 2$

Excentricité : $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Sommets : $S(0;2)$ et $S'(-4;2)$

Asymptotes : $y-2 = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot(x+2)$

$y = \frac{\sqrt{6}}{2}x + \sqrt{6} + 2$
$y = 1{,}22x + 4{,}45$

$y = -\frac{\sqrt{6}}{2}x - \sqrt{6} + 2$
$y = -1{,}22x - 0{,}45$

2. Détermine une équation cartésienne des coniques suivantes, précise la nature des coniques si elle n'est pas donnée (ellipse ou hyperbole) et les caractéristiques manquantes (foyer(s), directrice(s), excentricité, sommet(s), asymptotes éventuelles).

(1) Conique dont les foyers sont $F(4;0)$ et $F'(-4;0)$ et dont la longueur du grand axe vaut 10.

$\downarrow c=4$

Axe focal : $y=0$

↳ $2a=10 \to a=5$

$b^2=a^2-c^2=25-16=9 \to b=3$

Comme $a>c$, il s'agit d'une ellipse

$\mathcal{E} \equiv \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Directrices : $x=\pm\frac{25}{4}$

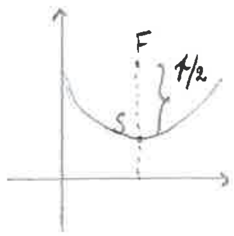
Excentricité : $\varepsilon=\frac{4}{5}$

Sommets : $S(5;0)$, $S'(-5;0)$, $S_1(0;3)$ et $S_2(0;-3)$

Asymptote : aucune

(2) Parabole de sommet $S(2;1)$ et de foyer $F(2;3)$.

Axe focal : $x=2$



$f=4$

Directrice : $y=-\frac{4}{2}+1 \Leftrightarrow y=-1$

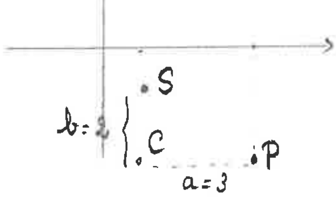
Excentricité : $\varepsilon=1$

Asymptote : aucune

$\mathcal{P} \equiv (y-1)^2=8.(x-2)$

(3) Conique d'excentricité inférieure à 1 $\to$ ellipse centrée en $C(1;-3)$, passant par le point $P(4;-3)$ et dont un sommet, situé sur l'axe focal est $S(1;-1)$.

Axe focal : $y=-3$



$\mathcal{E} \equiv \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

$c^2=a^2-b^2$
$=9-4=5 \to c=\sqrt{5}$

Foyers $F(\sqrt{5}+1;-3)$ et $F'(-\sqrt{5}+1;-3)$

Directrices : $x=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}+1=\pm\frac{9\sqrt{5}}{5}+1$

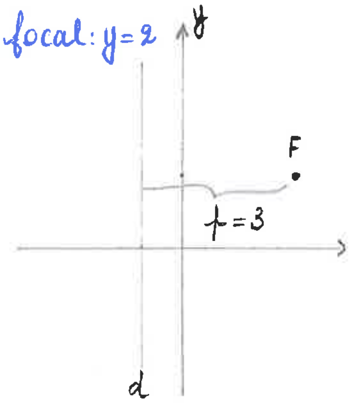
Excentricité : $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Sommets : $S(4;-3)$, $S'(-2;-3)$, $S_1(1;-1)$ et $S_2(1;-5)$

Asymptote : aucune

(4) Parabole de directrice $x=-1$ et de foyer $F(3;2)$.

Axe focal : $y=2$



Sommet : $S(1;2)$

Excentricité : $\varepsilon=1$

Asymptote : aucune

$\mathcal{P} \equiv (y-2)^2 = 6(x-1)$

(5) Conique dont les foyers sont $F(0;5)$ et $F'(0;-5)$, et dont les seuls sommets sont $S(0;+3)$ et $S'(0;-3)$.

$\to c=5$ Axe focal : Oy

2 sommets $\Rightarrow$ hyperbole

$\hookrightarrow a=3$

$b^2=c^2-a^2=25-9=16 \to b=4$

$\mathcal{H} \equiv -\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Directrices : $y=\pm\dfrac{9}{5}$

Excentricité : $\varepsilon=\dfrac{5}{3}$

Asymptotes : $y=\pm\dfrac{3}{4}x$

(6) Conique centrée en $C(-1;2)$, dont un sommet est $S(3;2)$ et dont une asymptote a pour équation $y-2=\dfrac{3}{4}(x+1)$.

$\to$ axe focal : $y=2$ et $a=4$

$\to b=3$

$\hookrightarrow$ hyperbole

$\mathcal{H} \equiv \dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

$c^2=a^2+b^2$
$=16+9$
$=25$
$\to c=5$

Foyers : $F(4;2)$ et $F'(-6;2)$

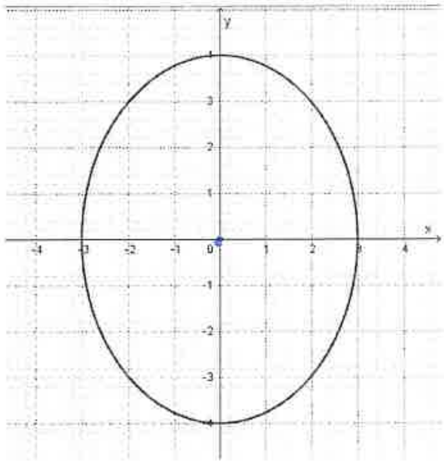
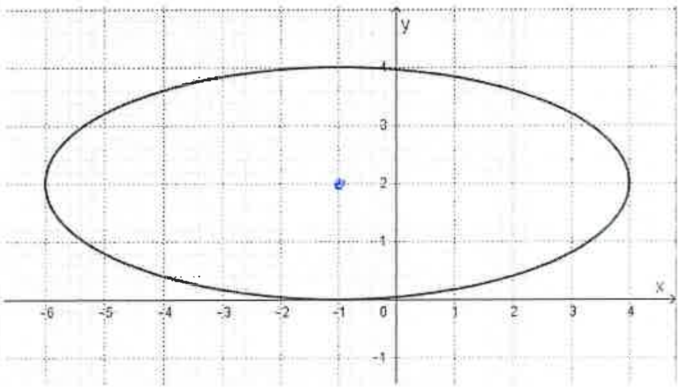
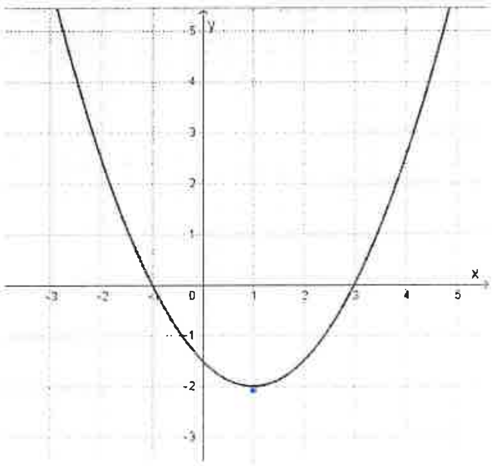
Directrices : $x=\pm\dfrac{16}{5}-1$ $\begin{cases} x=\dfrac{11}{5} \\ x=-\dfrac{21}{5} \end{cases}$

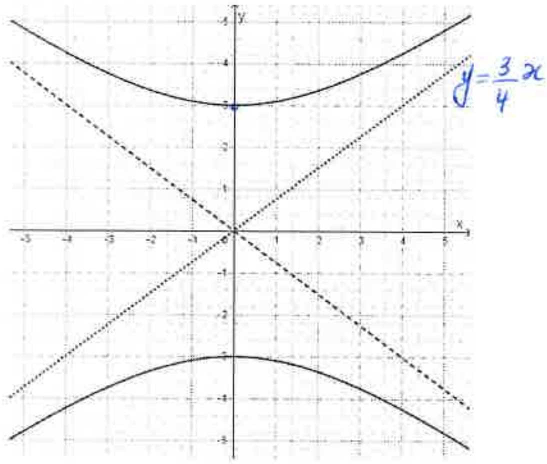
Excentricité : $\varepsilon=\dfrac{5}{4}$

Sommets : $S(3;2)$ et $S'(-5;2)$

Asymptotes : $y-2=\pm\dfrac{3}{4}(x+1)$ $\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{11}{4} \\ y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4} \end{cases}$

3. Détermine la nature, l'équation cartésienne et l'excentricité des coniques suivantes :

	Ellipse $a=4$ $\quad c=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ $b=3$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{4}$
	Ellipse $a=5$ $\quad c=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$ $b=2$ $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ $\varepsilon=\frac{\sqrt{21}}{5}$
	Parabole $(x-1)^2=2p\cdot(y+2)$ $(3;0)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow (3-1)^2=2p\cdot(0+2)$ $\Leftrightarrow 4=4p$ $\Leftrightarrow p=4$ $\mathcal{P}\equiv (x-1)^2=2\cdot(y+2)$ $\varepsilon=1$



Hyperbole

$a = 3 \quad \rightarrow b = 4$

$\rightarrow c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\mathcal{H} = -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\varepsilon = \frac{5}{3}$