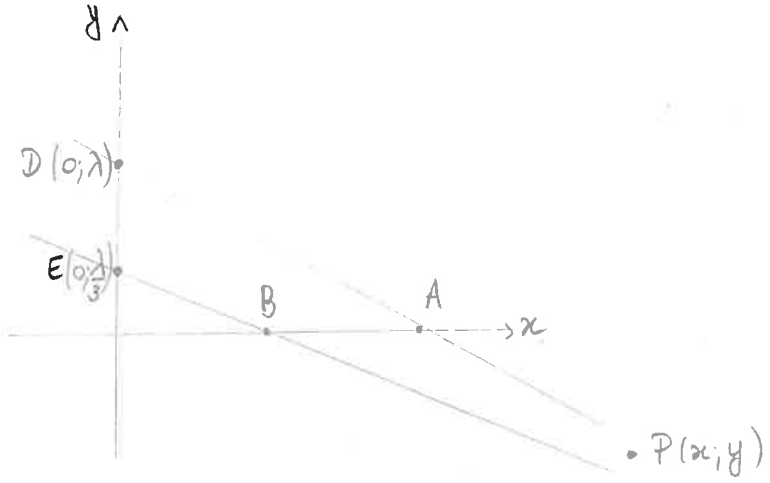
LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Lieux géométriques

C. SCOLAS

https://bit.ly/3ZF3ThE

1. On considère les points $A(4;0)$ et $B(2;0)$. D est un point variable de l'axe des ordonnées et E est le point tel que $3\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}$. Détermine le lieu des points P à l'intersection des droites AD et BE lorsque D parcourt l'axe Oy.



pente de $AD = \frac{0-\lambda}{4-0} = -\frac{\lambda}{4}$ $\quad \to AD \equiv y = -\frac{\lambda}{4}x + \lambda$

pente de $BE = \frac{0-\frac{\lambda}{3}}{2-0} = -\frac{\lambda}{6}$ $\quad \to BE \equiv y = -\frac{\lambda}{6}x + \frac{\lambda}{3}$

P est le point d'intersection des droites AD et BE :

$$\begin{cases} y = -\frac{\lambda}{4}x + \lambda \\ y = -\frac{\lambda}{6}x + \frac{\lambda}{3} \end{cases} \to -\frac{\lambda}{4}x + \lambda = -\frac{\lambda}{6}x + \frac{\lambda}{3}$$

$$\lambda\left(-\frac{1}{4}x+1\right) = \lambda \cdot \left(-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}\right)$$

$$\lambda \cdot \left[\left(-\frac{1}{4}x+1\right)-\left(-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}\right)\right] = 0$$

$$\lambda \cdot \left(\frac{-1}{12}x+\frac{2}{3}\right)=0$$

$\lambda = 0$ impossible car D est un point variable

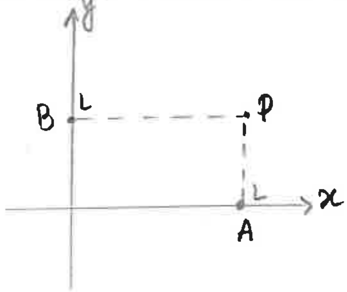
$x = 8$

Le lieu est la droite verticale d'équation $x=8$.

2. On donne un point quelconque P dans un repère orthonormé.

A est la projection orthogonale de P sur l'axe des abscisses et B est la projection orthogonale de P sur l'axe des ordonnées. Détermine le lieu des points tq $|OA|+|OB|=1$.

Représente ensuite ce lieu dans un repère orthonormé.



$P(x;y)$

$A(x;0)$

$B(0;y)$

$|OA|+|OB|=1 \Leftrightarrow |x|+|y|=1$

si $x \geq 0$:

si $y \geq 0$: $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$

Pour que la condition $x \geq 0$ et $y \geq 0$ soit respectée, cette droite est limitée aux valeurs de x appartenant à $[0;1]$

si $y<0$: $x-y=1 \Leftrightarrow y=x-1$

... $x \in [1;\rightarrow$

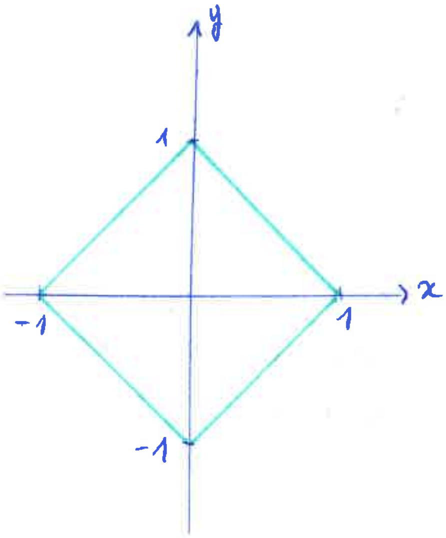
si $x<0$:

si $y \geq 0$: $-x+y=1 \Leftrightarrow y=x+1$

... $x \in [-1;0$

si $y<0$: $-x-y=1 \Leftrightarrow y=-x-1$

... $x \in [-1;0[$



3. Détermine le lieu des points du plan tels que leur distance à la droite $d \equiv 4x+3y-1=0$ est égale à 3 fois le carré de la distance de ces points au point $A(2;4)$.

Soit $P(x;y)$ un point du lieu géométrique.

$P \in L.G. \Leftrightarrow d(P,d) = 3.\overline{PA}^2$

$$\Leftrightarrow \frac{|4x+3y-1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 3.\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4x+3y-1|}{5} = 3.\left[(x-2)^2+(y-4)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow |4x+3y-1| = 15.(x^2-4x+4+y^2-8y+16)$$

$$\Leftrightarrow |4x+3y-1| = 15x^2-60x+15y^2-120y+300$$

si $4x+3y-1 \geq 0$: $4x+3y-1 = 15x^2-60x+15y^2-120y+300$

$$15x^2-64x+15y^2-123y = -301$$

$$x^2-\frac{64}{15}x+\frac{4096}{225}+y^2-\frac{41}{5}y+\frac{1681}{100} = -301+\frac{4096}{225}+\frac{1681}{100}$$

$$\left(x-\frac{32}{15}\right)^2+\left(y-\frac{41}{10}\right)^2 = -265,99$$

impossible

si $4x+3y-1<0$: $-4x-3y+1 = 15x^2-60x+15y^2-120y+300$

$$15x^2-56x+15y^2-117y = -299$$

$$x^2-\frac{56}{15}x+\frac{784}{225}+y^2-\frac{39}{5}y+\frac{1529}{100} = -299+\frac{784}{225}+\frac{1529}{100}$$

$$\left(x-\frac{28}{15}\right)^2+\left(y-\frac{39}{10}\right)^2 = -281,55$$

impossible

→ Ce lieu n'existe pas.

4. On donne les points $A(1;2)$, $B(-3;4)$ et $C(2;-2)$. Détermine le lieu des points M tels que $\left(\overline{MA}+2\overline{MB}+\overline{MC}\right)\odot\left(2\overline{MA}+\overline{MB}-3\overline{MC}\right)=0$.

Représente ensuite ce lieu.

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(1-x\,;\,2-y)+2.(-3-x\,;\,4-y)+(2-x\,;\,-2-y)$$
$$=(-3-4x\,;\,8-4y)$$

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2.(1-x\,;\,2-y)+(-3-x\,;\,4-y)-3.(2-x\,;\,-2-y)$$
$$=(-7\,;\,14)$$

$$(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\odot(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC})=0$$

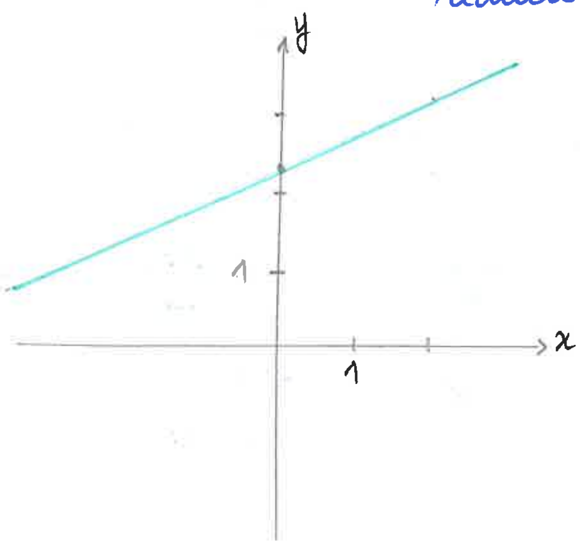
$$\Leftrightarrow\quad(-3-4x\,;\,8-4y)\odot(-7\,;\,14)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 21+28x+112-56y=0$$

$$\Leftrightarrow\quad -56y=-28x-133$$

$$\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{19}{8}$$

Le lieu est une droite dont l'équation réduite est $y=\frac{1}{2}x+\frac{19}{8}$.



5. On donne les points $A(1;2)$, $B(-3;4)$ et $C(2;-2)$.

Détermine le lieu des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\odot\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0$.

On reprend les vecteurs de l'exercice précédent.

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(-3-4x;8-4y)$

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=2.(1-x;2-y)+(-3-x;4-y)+3.(2-x;-2-y)$

$=(5-6x;2-6y)$

$(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\odot(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC})=0$

$\Leftrightarrow (-3-4x;8-4y)\odot(5-6x;2-6y)=0$

$\Leftrightarrow -15+18x-20x+24x^2+16-48y-8y+24y^2=0$

$\Leftrightarrow 24x^2-2x+24y^2-56y=-1$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{12}x+\frac{1}{576}+y^2-\frac{7}{3}y+\frac{49}{36}=-1+\frac{1}{576}+\frac{49}{36}$

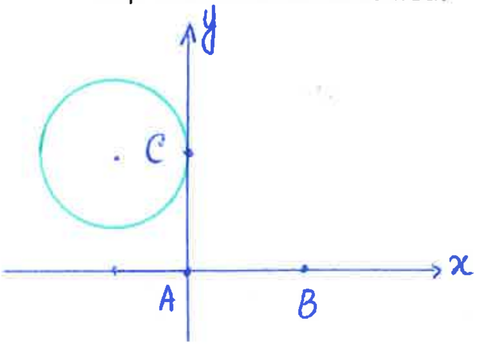
$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{24}\right)^2+\left(y-\frac{7}{6}\right)^2=\frac{209}{576}$

Le lieu est un cercle de centre $\left(-\frac{1}{24};\frac{7}{6}\right)$ et de rayon 0,6.

6. *ABC* est un triangle rectangle isocèle en A.

Détermine le lieu des points *M* tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=1$.

Représente ensuite ce lieu.



$A(0;0)$

$B(1;0)$

$C(0;1)$

$\overrightarrow{MA}=(-x;-y)$

$\overrightarrow{MB}=(1-x;-y)$

$\overrightarrow{MC}=(-x;1-y)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC} &= (-x;-y)-2.(1-x;-y)+3.(-x;1-y)\\ &= (-2x-2;-2y+3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=1 &\Leftrightarrow \sqrt{(-2x-2)^2+(-2y+3)^2}=1\\ &\Leftrightarrow (-2x-2)^2+(-2y+3)^2=1\\ &\Leftrightarrow 4x^2+8x+4+4y^2-12y+9=1\\ &\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-3y+\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}+1+\frac{9}{4}\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1\end{aligned}$$

Le lieu est un cercle de centre $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ et de rayon 1.