UAA 2 :

Lois de probabilité

L'église de Hallgrimur à Reykjavik est la plus haute d'Islande, en raison de la forme particulière de son clocher de 73 m, inspirée des orgues basaltiques naturelles.

Mais, pour un statisticien, cette forme évoque la courbe en cloche de la loi normale.

Cette loi de probabilité a été introduite en 1809 par Gauss dans le contexte des mesures astronomiques, et reprise en 1812 par Laplace dans sa *Théorie analytique des probabilités*.

Objectifs : Lois de probabilité $\quad$ 6ème 6h

L'élève doit SAVOIR :

1. Définir "variable aléatoire".
2. Définir "loi de probabilité".
3. Donner la formule de l'espérance mathématique et expliquer ce que représente ce nombre.
4. Donner les formules de la variance et de l'écart-type.
5. Définir "schéma de Bernoulli" et "épreuve de Bernoulli".
6. Définir "loi binomiale" et donner la formule qui s'y rapporte.
7. Donner les formules de l'espérance et de l'écart-type dans le cas d'une loi binomiale.
8. Définir "fonction de densité".
9. Définir "loi uniforme" et donner la fonction de densité.
10. Définir "loi exponentielle" et donner la fonction de densité.
11. Définir "loi normale".
12. Esquisser le graphique d'une loi normale et en donner les caractéristiques.
13. Donner les conditions pour qu'une distribution statistique suive une loi de distribution normale.
14. Donner les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson ou par la loi normale.

L'élève doit ETRE CAPABLE DE :

1. Donner un exemple de variable aléatoire.
2. Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire et interpréter ces nombres par rapport au contexte dans lequel ils sont calculés.
4. Résoudre des exercices de probabilités faisant intervenir une loi binomiale ou une loi normale (avec l'aide d'une table).

« Tout ce qui arrive à l'existence doit s'attribuer à l'une des trois causes : la nature, l'art et le hasard. »
(Aristote, 350 av. J.C.)

Après avoir réalisé une expérience aléatoire, il arrive bien souvent qu'on s'intéresse plus à une fonction du résultat qu'au résultat lui-même. Expliquons ceci au moyen de l'exemple suivant : lorsqu'on joue aux dés, certains jeux accordent de l'importance à la somme obtenue sur deux dés, 7 par exemple, plutôt qu'à la question de savoir si c'est la paire (1 ; 6) qui est apparue, ou (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (5 ; 2) ou plutôt (6 ; 1).

A. Vocabulaire et notations

Prenons un exemple : L'expérience aléatoire consiste à lancer une pièce de monnaie trois fois. On s'intéresse à ce qui apparaît chaque fois sur la face supérieure.

(1) Détermine la catégorie d'épreuves Ω.

(2) On note X le nombre de "pile" obtenu. Quelles valeurs peut prendre X ?

$X = \{\ldots\ldots\ldots\}$

(3) On note

- x_i, une valeur quelconque que peut prendre X ;
- $p(X = x_i)$, la probabilité de l'événement associé à x_i.

Pour chaque valeur x_i, calcule $p(X = x_i)$.

Définition : Une **variable aléatoire** est une fonction qui associe à chacun des résultats d'une expérience aléatoire sa probabilité d'apparition.

On peut donc définir plusieurs variables aléatoires à partir d'une expérience aléatoire.

Exercice : On lance deux dés cubiques successivement.

(1) Détermine la catégorie d'épreuves Ω correspondant à l'expérience aléatoire.

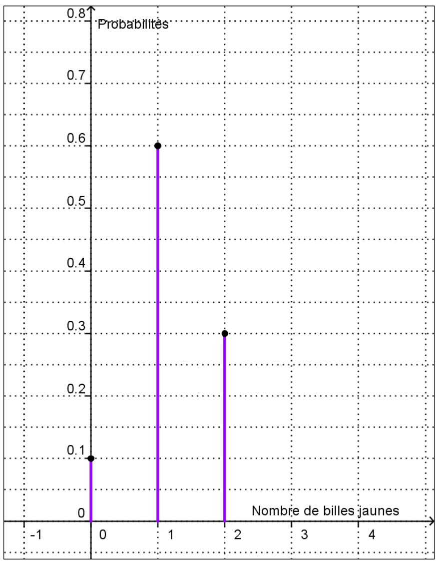
(2) Détermine, à partir de cette expérience aléatoire, deux variables aléatoires ainsi que l'ensemble des valeurs prises pour chacune d'entre elles.

En associant à chaque valeur de la variable aléatoire la probabilité correspondante, on définit la **loi de probabilité** (ou distribution) de cette variable aléatoire.

Cette loi de probabilité peut être représentée sous la forme d'un diagramme en bâtons.

Exemple : Une boîte contient trois billes jaunes, une bille verte et une bille noire.
On tire, au hasard, une bille de la boîte et sans la remettre dans la boîte, on tire une seconde bille.
On s'intéresse au nombre de billes jaunes tirées.

Voici le diagramme en bâtons associé à cette situation :



La somme des probabilités est égale à 1 : $\sum_{i=1}^{n} p\left(X = x_i\right) = 1$ où n est le nombre de valeurs de la variable aléatoire.

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est la fonction $F\left(k\right) = p\left(X \le k\right)$.

Exemple : On considère un jeu de 32 cartes et on associe une valeur à chacune des cartes : 0 pour les cartes de 7 à 10, 1 pour les valets, 2 pour les dames, 3 pour les rois et 5 pour les as. On tire une carte au hasard, quelle est la probabilité de gagner moins de deux points ?

Dans ce problème, la variable aléatoire X est la fonction qui associe une valeur à chaque carte tirée. Ici, elle ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2, 3 et 5. C'est une variable aléatoire discrète. La loi de probabilités de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	5
$p(X = x_i)$					

Et on a $F(2) = p(X \leq 2) = \ldots$

Exercices :

Donne la loi de probabilité des variables aléatoires définies dans les situations suivantes :

(1) Je jette deux dés bien équilibrés, X désigne la somme des points obtenus.

(2) Un groupe comprend 5 garçons et 3 filles. Je choisis 4 personnes au hasard, X désigne le nombre de filles.

(3) Pour fêter son ouverture, un magasin offre aux 50 premiers clients un billet de loterie donnant droit à un bon d'achat. Les différents lots sont : un bon d'achat de 500 €, deux de 300 €, deux de 100 € et les autres de 20 €. X désigne le gain d'un possesseur de billet.

(4) Un élève peu sérieux répond de façon aléatoire à un « Vrai ou faux » comportant trois questions. Chaque réponse juste rapporte deux points et chaque réponse fausse fait perdre un point. Le total des points de l'exercice est ramené à 0 s'il est négatif. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par l'élève peu sérieux. Représente également le diagramme en bâtonnets de cette variable.

(5) Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules noires. Un joueur tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. Soit x un réel positif. Lors de chacun des deux tirages, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd 2 € s'il obtient une boule noire. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (en euros) au terme des deux tirages.

B. Espérance et écart-type

1. Exploration

Nous sommes sollicités de toutes parts pour tenter notre chance à des jeux de hasard plus attrayants les uns que les autres : loteries, casinos, salle de jeux, etc.

L'éventail de jeu est très important et il importe de savoir à quoi on s'engage. Si les gains sont très clairement annoncés, rien n'est évidemment dit en ce qui concerne les risques de perte !

La loterie nationale propose un jeu de grattage. Un million de billets sont mis en vente au prix de 1 euro chacun. Les lots sont les suivants :

- 210 000 billets gagneront 2 € ;
- 22 000 billets gagneront 5 € ;
- 2 800 billets gagneront 10 € ;
- 200 billets gagneront 20 € ;
- 20 billets gagneront 1000 € ;
- un seul billet gagnera 25 000 € ;
- les autres billets ne gagneront rien.

Un milliardaire de passage se précipite et achète tous les billets.

(1) Combien cela lui coûte-t-il ?

(2) Quels gains obtient-il ?

(3) On note X le gain espéré pour un billet. Détermine la loi de probabilité de X.

(4) En assimilant les probabilités obtenues en (3) à des "fréquences théoriques", calcule la moyenne. Quelle est la signification concrète de la moyenne dans ce contexte ?

(5) Calcule la variance et l'écart-type à l'aide des formules vues en statistiques.

2. Espérance mathématique

Définition : L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la somme des produits de chaque valeur prise par X par la probabilité que X prenne cette valeur.

$$E(X) = \ldots$$

où $\left| \begin{array}{l} x_i \text{ sont les valeurs prises par la variable aléatoire } X \\ p_i \text{ sont les probabilités } p(X = x_i) \\ n \text{ est le nombre de valeurs de la variable aléatoire} \end{array} \right.$

L'espérance mathématique correspond donc à la moyenne étudiée en statistiques ; elle mesure la valeur x_i *la plus probable* prise par X .

Le terme « espérance » provient du fait que le calcul des probabilités a d'abord été appliqué aux jeux de hasard.

Les valeurs prises par X sont les gains, positifs ou négatifs (un gain négatif signifiant une perte). L'espérance mathématique d'un joueur représente ainsi le gain moyen par partie lorsque l'on joue un grand nombre de fois.

3. Variance et écart-type

La variance et l'écart-type, comme en statistiques, sont des paramètres de dispersion : ils renseignent sur l'étalement de la variable de part et d'autre de l'espérance mathématique. Une faible valeur de l'écart-type traduit une forte concentration des données autour de l'espérance mathématique.

<u>Définition :</u> La **<u>variance</u>** de la variable aléatoire X , notée $V(X)$, se calcule par

$$V(X)=\dots$$

<u>Définition :</u> L'**<u>écart-type</u>** de la variable aléatoire X , noté $\sigma(X)$, se calcule par

$$\sigma(X)=\dots$$

4. Exercices

1. Un joueur lance un dé bien équilibré. Si le dé tombe sur un nombre premier, il gagne en argent la somme égale à ce nombre, mais si le dé tombe sur un nombre qui n'est pas premier, il perd ce nombre en argent.

   (1) Quelle variable aléatoire X choisis-tu ?
   (2) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (3) Calcule l'espérance mathématique.
   (4) Ce jeu est-il équilibré, favorable ou défavorable au joueur ? Pourquoi ?

2. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la suivante :

x_i	$p(X=x_i)$
-2	0,1
-1	0,1
0	0,2
1	0,2
2	0,3
3	?

   (1) Détermine $p(X=3)$.
   (2) Calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X.

3. On jette deux dés équilibrés. On désigne par X le chiffre maximum montré par les deux dés.
   (1) Donne la loi de probabilité de X.
   (2) Représente le diagramme en bâtons.
   (3) Calcule $E(X)$. Que représente ce nombre dans ce contexte ?
   (4) Calcule σ . Que représente ce nombre dans ce contexte ?

4. Une fléchette est lancée au hasard sur une cible circulaire de 30 cm de rayon. On suppose que la fléchette atteint toujours la cible. On y trace deux cercles concentriques de rayons respectifs 10 et 20 cm. Le joueur gagne 5, 10 ou 20 points selon la région qu'il atteint : 20 points pour la région au centre,…
   (1) On appelle X la variable aléatoire associée aux points obtenus. Donne la loi de probabilité de X.
   (2) Pour participer, un joueur doit dépenser 2 €. La région à 20 points lui apporte 5€, la région à 10 points apporte 3 € et la dernière région ne rapporte pas d'argent. Ce jeu doit forcément être défavorable au joueur pour que le commerçant « gagne sa croûte »… Montre-le.
   (3) Propose une distribution des gains pour que le jeu ne soit ni favorable ni défavorable au joueur et cohérent par rapport à la difficulté d'atteindre la cible centrale.

5. Une salle de spectacle propose pour la saison des abonnements pour 4, 5 ou 6 spectacles. Dans la population des abonnés, la répartition est la suivante :
   - 43,5 % ont choisi l'abonnement "4 spectacles" ;
   - 33 % ont choisi l'abonnement "5 spectacles" ;
   - le reste a choisi l'abonnement "6 spectacles".

   L'abonnement pour 4 spectacles coûte 50 €, celui pour 5 spectacles coûte 60 € et celui pour 6 spectacles coûte 70 €. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par l'abonné interrogé.
   (1) Donne la loi de probabilité de X.
   (2) Calcule l'espérance de X.

Pour chercher :

1. Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

   Un joueur doit miser m euros pou jouer au jeu suivant :
   - on lance une pièce équilibrée ;
   - si elle donne « face » alors le joueur gagne 1 € ;
   - si elle donne « pile » alors on relance la pièce. En cas de « face », le joueur gagne 2 €, sinon on relance la pièce, et ainsi de suite en doublant la mise à chaque lancer.

   Quel doit être le montant m fixé afin que le jeu soit équilibré ?

2. Une urne contient trois fois plus de jetons « 3 » que de jetons « 1 », trois fois plus de jetons « 2 » que de jetons « 4 » et deux fois plus de jetons « 2 » que de jetons « 3 ».
   Un joueur prélève un jeton au hasard dans l'urne. Il gagne g euros si le jeton a un numéro impair, et il perd h euros si le jeton a un numéro pair.
   Quelles valeurs donner à g et h pour que l'espérance du gain vaille -1 et la variance 1 ?

3. Marche aléatoire
   Une particule est positionnée aléatoirement sur l'un des sommets d'un triangle ABC. Elle peut rester sur ce sommet avec la probabilité $\frac{1}{3}$, ou bien se déplacer vers un autre sommet, avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
   On note X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où elle s'arrête sur le sommet A après 3 mouvements.
   Détermine la loi de probabilité de X.

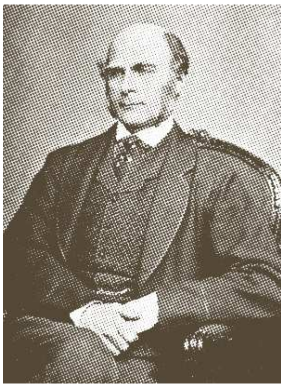
Le saviez-vous ?

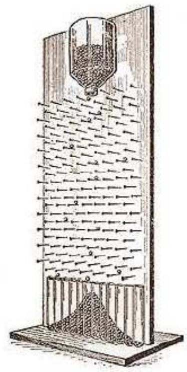
La notion d'espérance d'une variable aléatoire est apparue dès le XVII^{e} siècle dans les travaux de Blaise Pascal (1623-1662) et de Christian Huygens (1629-1695), sans pour autant être formalisée : la question était alors d'estimer les « chances de gains » à un jeu aléatoire.

C. Loi binomiale

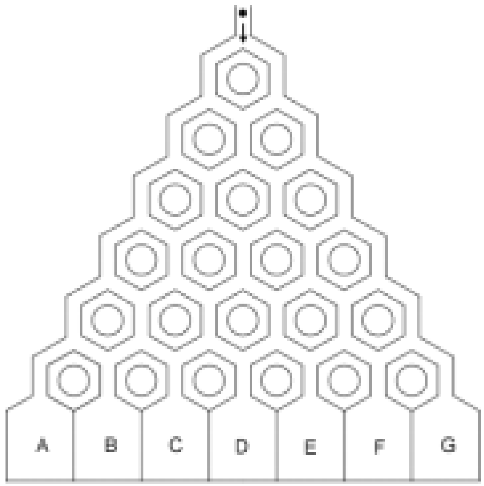
C'est la plus utilisée des lois de probabilité relatives aux variables aléatoires discrètes.

1. Exploration





La planche de Galton, du nom de son inventeur *Sir Francis Galton* (1822-1911), et imaginée en 1889, est un dispositif qui permet de visualiser la loi binomiale.
Considérons une planche sur laquelle sont disposés des clous (ou des écrous) en quinconce comme sur les figures ci-dessous. Au-dessus se trouve un réservoir contenant un certain nombre de billes. Lorsqu'on ouvre le réservoir, les billes descendent une par une, en passant aléatoirement d'un côté ou l'autre des clous, pour se diriger vers les 7 urnes A, B, C, ...



(1) On lâche une seule bille du haut de la planche. Dans quelle urne se dirigera-t-elle ?

Simulation : https://bit.ly/3yZNYvl

(2) Dans quelle urne a-t-elle le plus de chance d'arriver ?

(3) On lâche à présent 1000 billes. Comment vont-elles se répartir dans les 7 urnes ?

Simulation : https://bit.ly/3iaxwBT

(4) On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois qu'une bille se dirige à droite sur son trajet.

Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

(5) Donne la loi de probabilité de *X*.

(6) Quel lien peux-tu établir entre ce tableau et le triangle de Pascal ?

(7) Imaginons un jeu qui consiste à introduire une bille dans la planche. Le joueur gagne le nombre d'euros égal au numéro de l'urne (urne A = urne 1, urne B=urne 2, …) dans laquelle tombe la bille. Quelle somme gagne-t-on en moyenne à ce jeu ?

Dans la situation qui vient d'être décrite, X ne peut prendre que des valeurs entières. On dit que X est une **variable aléatoire discrète**. Elle désigne le nombre de « succès » lors de n épreuves identiques et indépendantes : "la bille se dirige à droite". Chaque épreuve ne comporte que **deux** éventualités : "aller à droite", avec une probabilité p, ou "aller à gauche", avec une probabilité $q = 1 - p$.

2. Loi binomiale

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne possède que deux résultats possibles. L'un est nommé **succès**, l'autre est nommé **échec** ; ce sont des événements contraires.

La tradition veut que la probabilité de succès soit notée *p* et la probabilité d'échec *q*.

Puisque les deux événements sont contraires, on a $q = 1 - p$.

Si l'on répète *n* fois, dans les mêmes conditions, une épreuve de Bernoulli, on obtient un **schéma de Bernoulli**.

En notant *X* le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli, on obtient une variable aléatoire dont la loi est dite **loi binomiale**.

Cette loi est définie par $f(x_i) = p(X = x_i) = C_n^{x_i} . p^{x_i} . (1-p)^{n-x_i}$

$$\text{où} \left| \begin{array}{l} p \text{ est la probabilité de succès lors d'une seule épreuve;} \\ q = 1 - p \text{ est la probabilité d'échec lors d'une seule épreuve;} \\ n \text{ est le nombre de fois que l'on répète l'expérience.} \end{array} \right.$$

La loi binomiale de paramètres *n* et *p* est notée $B(n, p)$.

Exemple : Un dé équilibré est lancé 3 fois de suite.

On nomme succès (S) le fait que la face supérieure soit inférieure ou égale à 2, et donc échec (E) le fait que ………………………………………………………………

- Pour un seul lancer, $p = \ldots$ et $q = \ldots$
- Pour 3 lancers,

$f(0) = p(X = 0) = \ldots$ $\qquad$ $f(2) = p(X = 2) = \ldots$

$f(1) = p(X = 1) = \ldots$ $\qquad$ $f(3) = p(X = 3) = \ldots$

Remarquons que $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \ldots$

3. Espérance et écart-type

Dans le cas d'une variable aléatoire binomiale, l'espérance se calcule facilement au moyen de la formule $E(X) = n.p$.

La variance prend également une forme particulière : $V(X) = n.p.(1-p)$.

4. Exemple

La probabilité qu'un tireur atteigne une cible est de $\frac{1}{4}$.

(1) En supposant qu'il tire 7 fois, quelle est la probabilité qu'il atteigne la cible au moins 2 fois ?

(2) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois soit supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$?

5. Exercices

1. Un singe tape 100 fois sur un clavier alphanumérique comportant 40 touches. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le singe a tapé sur la lettre « E ». X suit alors une loi binomiale de paramètres 100 et $\frac{1}{40}$. Calcule et interprète :

   (1) $p(X = 15)$

   (2) $p(X \leq 3)$

   (3) $E(X)$

2. On lance un dé équilibré 20 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir…
   (1) 8 fois le chiffre six ?
   (2) moins de 4 fois le chiffre six (4 compris) ?
   (3) plus de 2 fois le chiffre six (2 compris) ?

3. Une rivière comporte une population d'écrevisses. Un écologiste réalise une expérience en disposant tous les 10 mètres une nasse à écrevisses. Il en place ainsi 25 et les numérote de 1 à 25. Pour cette rivière, il n'y a que 15% de chances de relever une nasse vide. Détermine la probabilité de relever 3 nasses vides.

4. Mathias et Alexandre s'affrontent dans un tournoi de tennis de table. La probabilité que Mathias gagne une partie est de 0,6. On joue 9 parties, le vainqueur est celui qui gagne le plus de parties.
   Quelle est la probabilité qu'Alexandre gagne le tournoi ?

5. Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. Chaque jour, au chaque cours de mathématiques, le professeur interroge un élève au hasard, sans se rappeler quels élèves il a interrogés les jours précédents.
   (1) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, exactement 4 filles soient interrogées ? Définis le succès pour cette variable aléatoire et donne les valeurs des paramètres de la loi binomiale.
   (2) Quel doit être le nombre minimal de jours de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

6. Un site internet propose un jeu en ligne dans lequel un joueur doit effectuer 10 parties. On suppose que toutes les parties sont indépendantes. La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

(1) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins deux parties ?

(2) Détermine l'espérance de X.

(3) Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €. Explique pourquoi ce jeu est avantageux pour le site internet.

(4) Calcule la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €.

Pour chercher :

1. La trajectoire en lignes brisées d'un mobile téléguidé s'élevant dans les airs est décrite par une succession de points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 de coordonnées $(x;y)$ où x est la distance au sol en mètre qui sépare le mobile de son point de départ O (donc $M_0 = O = (0;0)$) et y son altitude en mètre par rapport au sol.

Tous les 12 mètres (distance au sol), la direction rectiligne du mobile est choisie au hasard en procédant comme suit : pour tout entier n compris entre 0 et 4, on tire au hasard un entier k compris entre 1 et 4 et on pose $\overrightarrow{M_nM_{n+1}} = 12\overrightarrow{u_k}$ où $\overrightarrow{u_k} = \left(1;\frac{1}{k}\right)$.

(1) On a tiré successivement les entiers suivants : 1 ; 2 ; 1 ; 3 ; 2. En choisissant une échelle adaptée, représente la trajectoire du mobile dans cette situation.

(2) Dans le cas général, à la fin du déplacement du mobile, à quelle altitude peut-on s'attendre à le trouver ?

(3) Au moment de son départ en O, un rideau de pluie s'abat sur le mobile. La direction de la pluie est donnée par le vecteur $\vec{v}$ de composantes $(1:-3)$.

Sachant que le mobile est sévèrement endommagé lorsque l'une de ses trajectoires et orthogonale à la direction de la pluie, calcule la probabilité qu'il le soit.

(4) Détermine la probabilité qu'à l'issue de son déplacement, le mobile atteigne la position M_5 de coordonnées $(60;24)$ sans avoir subi de dommage sévère.

D. Lois continues

Lorsque l'on s'intéresse à la durée d'une communication téléphonique, à la durée de vie d'un composant électronique ou à la température de l'eau d'un lac, la variable aléatoire X associée au temps ou à la température, peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné.
On dit alors que cette variable aléatoire X est continue (qui s'oppose à discrète comme c'est le cas, par exemple, dans la loi binomiale).
On ne peut plus parler de probabilité d'événements car les événements élémentaires sont en nombre infini. La probabilité d'une valeur isolée de X est alors nulle. On contourne cette difficulté en associant à la variable X un intervalle de $\mathbb{R}$ et en définissant une fonction de densité.

1. Activité

La calculatrice permet d'obtenir un nombre aléatoire avec 10 décimales dans l'intervalle $[0;1[$

Calculatrice TI
On appuie sur la touche math puis on choisit **PRB** et **NbrAléat**.

Calculatrice Casio
On appuie sur OPTN puis on choisit **PROB**, **Rand** et **Ran#**.

1) Combien y a-t-il de nombres avec 10 décimales dans l'intervalle $[0;1[$?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir 0,123 456 789 0 ?

On utilise à présent un tableur et la commande « =ALEA() » qui donne un nombre aléatoire (avec 15 décimales) pour réaliser une simulation de 5000 nombres dans $[0;1[$.

Dans la copie d'écran ci-dessous, on présente des relevés de cette simulation.

E3 =NB.SI($A1:$A5000;"<0,2")-NB.SI($A1:$A5000;"<0,1")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0,502668082421260										
2	0,366299904640073		Classe	[0;0,1[	[0,1;0,2[	[0,2;0,4[	[0,4;0,6[	[0,6;0,8[	[0,8;0,9[	[0,9;1[	Total
3	0,803212003060794		Effectif	512	493	982	1025	969	528	491	5000
4	0,540163650044041		fréquence	0,1024	0,0986	0,1964	0,2050	0,1938	0,1056	0,0982	1
5	0,769655100151884										
6	0,005502001771556										

1) Comment semblent être les fréquences observées pour des classes de même amplitude ?
2) Donne une estimation de la probabilité d'obtenir un nombre dans l'intervalle $[0,1;0,2[$.
3) Donne une estimation de la probabilité d'obtenir un nombre dans l'intervalle $[0,6;0,9[$.

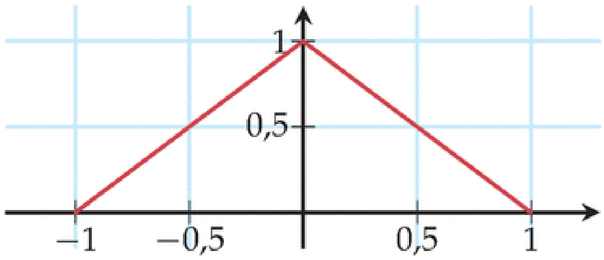
On choisit maintenant un nombre réel au hasard dans $[0;1]$ (sans se préoccuper du nombre de décimales).

1) Que peut-on penser de la probabilité de tomber exactement sur 0,4 ?
2) Que peut-on penser de la probabilité de tomber sur un nombre supérieur à 0,5 ?

2. Définitions

<u>Définition :</u> Si une fonction f définie sur un intervalle I est continue et positive sur I et si l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses et la courbe de f est égale à 1 (unité d'aire) alors on dit que f est une **fonction de densité** (ou une **densité de probabilité**).

<u>Exemple :</u> On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\in[-1;0] \\ -x+1 & \text{si } x\in[0;1] \end{cases}$.

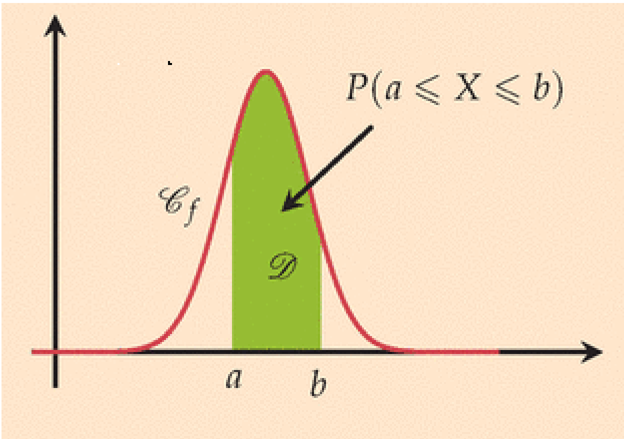


La fonction f est continue et positive sur $[-1;1]$.

De plus, la surface entre la courbe et l'axe des abscisses sur $[-1;1]$ est un triangle d'aire $\frac{2\times 1}{2}=1$.

f est donc bien une fonction de densité.

<u>Définition :</u> Soit f une fonction de densité sur un intervalle I.
Dire que la variable aléatoire X suit la loi de densité f signifie que pour tout intervalle $[a;b]$ inclus dans I, on a $p(a\le X\le b)=\text{aire}(\mathscr{D})$ où $\mathscr{D}$ est la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



On a alors

$$p(a\le X\le b)=\begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx & \text{si } x\in[a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarque : La probabilité qu'une variable aléatoire à densité X prenne une valeur c est égale à 0 car $p(X=c)=\int_c^c f(x)dx=0$.

Par conséquent, les éventuelles inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges dans les calculs de probabilité. Par exemple, $p(1<X\le 3)=p(1\le X\le 3)$.

Exercices :

1. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $[0;5]$ est représentée ci-dessous :

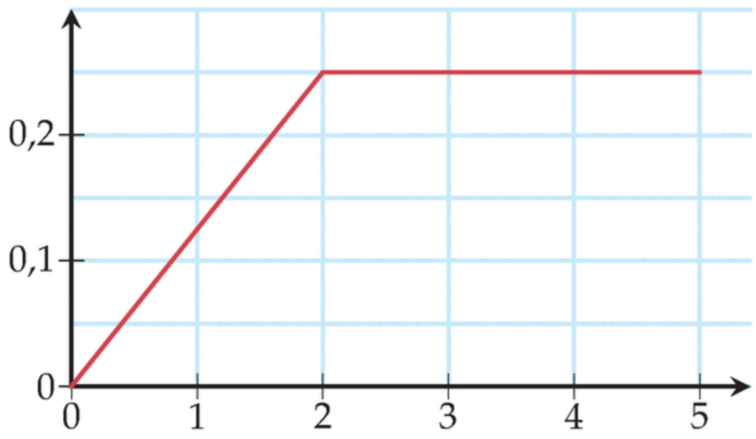
   Détermine

   (1) $p(0\le X\le 1)$

   (2) $p(2\le X\le 4)$

   (3) $p(1\le X\le 4)$

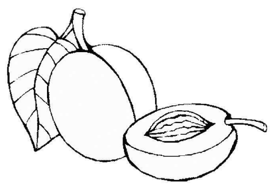
   (4) $p(X<3)$



2. Pour promouvoir les produits bio de son enseigne, le responsable d'un magasin décide d'organiser un jeu qui consiste, pour un client, à remplir un panier avec une certaine masse d'abricots issus de l'agriculture biologique.

   Il est annoncé que le client gagne le contenu du panier si la masse d'abricots déposés est comprise entre 3,2 et 3,5 kg.

   La masse de fruits, en kg, mis dans le panier par les clients peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité de densité f définie sur l'intervalle $[3;4]$ par $f(x)=\dfrac{2}{(x-2)^2}$.



   (1) Vérifie que la fonction f est bien une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[3;4]$.

   (2) Le magasin annonce « un client sur trois gagne le panier ! ». Cette annonce est-elle exacte ? Justifie ta réponse.

   (3) Calcule l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

On rappelle que, pour une variable aléatoire X de densité f sur l'intervalle $[a;b]$, $E(X)=\int_a^b x.f(x)dx$.

Interprète le résultat dans le contexte de cet exercice.

3. On considère la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x)=\frac{1}{2}x$.

(1) Montre que f est une fonction de densité sur $[0;2]$.

(2) Calcule les probabilités suivantes :

a. $p(0,5 \leq X \leq 1,5)$

b. $p(X \leq 1)$

c. $p(X > 1)$

d. $p(0 \leq X \leq 2)$

4. Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=ax^2$.

(1) Détermine la valeur de a pour que f soit une fonction de densité sur $[0;1]$.

(2) Soit X la variable aléatoire qui suit la loi de densité f pour la valeur trouvée de a à la question précédente.

Calcule les probabilités suivantes :

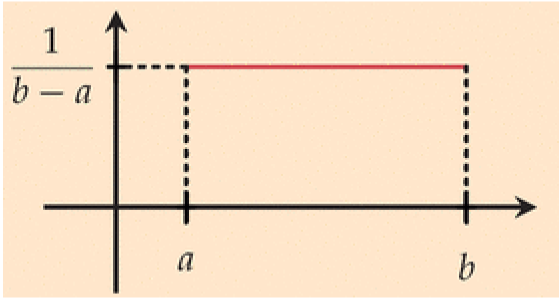
a. $p(0,1 \leq X \leq 0,5)$

b. $p(X \leq 0,1)$

c. $p(X < 0,5)$

3. Loi uniforme

Définition : Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a;b]$ si elle admet pour densité la fonction constante f définie sur $[a;b]$ par :



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a;b] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Notation : Une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ se note $\mathcal{U}([a;b])$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$ et soit $[c;d]$ un intervalle inclus dans $[a;b]$. Alors on a $p(c\leq X\leq d)=\dfrac{d-c}{b-a}$.

Propriété : Une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$ a pour espérance $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ et pour variance $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Exemple : Arnaud et Lise rentrent de l'école à pied. Leurs parents savent qu'ils doivent arriver entre 17h et 18h à la maison.

On peut modéliser leur heure d'arrivée par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[17;18]$.

(1) Quelle est la probabilité qu'ils arrivent entre 17h et 17h15 ?

(2) A quelle heure les parents peuvent-ils « espérer » les voir arriver ?

Exercices :

1. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[0;100]$.

   (1) Que vaut $p(X < 20)$?

   (2) Calcule $E(X)$.

2. Donne la fonction de densité de la loi uniforme $\mathscr{U}([-10;20])$.

3. On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{U}([0;20])$.

   (1) Quelle est la fonction de densité associée à cette variable aléatoire ?

   (2) Que vaut l'espérance de X ?

   (3) Soit t un réel de l'intervalle $[0;20]$. Détermine l'expression de $p(X \leq t)$ en fonction de t.

4. Caroline a dit qu'elle passerait voir Julien à un moment quelconque entre 18h30 et 20h45.

   Quelle est la probabilité qu'elle arrive pendant le feuilleton préféré de Julien qui dure de 19h à 19h30 ?

5. La masse en gramme des melons d'un maraîcher est modélisée par une variable aléatoire M qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850;x]$ avec $x > 1200$.

   On constate que 75 % des melons du maraîcher ont une masse comprise entre 900 et 1200 g.

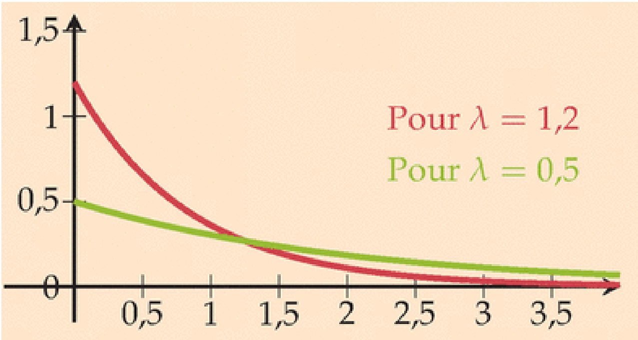
   Détermine la valeur de x.

Le saviez-vous ? La notion d'uniformité vient du fait que la probabilité qu'une valeur tirée d'une loi uniforme soit dans un certain intervalle ne dépend pas de la position de l'intervalle, mais uniquement de sa longueur.

4. Loi exponentielle

(1) Définition et propriétés

La loi exponentielle permet de modéliser des variables aléatoires qui prennent des valeurs réelles positives, comme des durées de vie ou des temps d'attente.



Définition : Une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ où $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda.e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Propriétés : Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ et a, b, deux réels positifs. On a alors :

- $p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $p(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $p(X \geq a) = e^{-\lambda a}$

Propriété : Une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle a pour espérance $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et pour variance $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Exemple : On considère que le temps d'attente en minutes à un guichet du service après-vente d'un magasin peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

(1) Calcule, au millième près, la probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes.

(2) Calcule, au millième près, la probabilité d'attendre plus de 10 minutes.

(3) Un client se présente au guichet. Quel temps peut-il « espérer » attendre ?

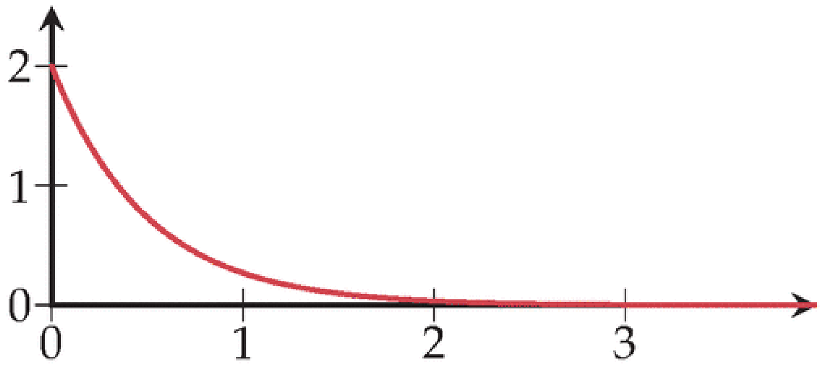
(2) Exercices

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle telle que $p(X \leq 5) = 0,2$. Détermine λ.

2. La durée, en mois, de fonctionnement sans panne du distributeur de glaces à l'italienne d'un commerçant est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle.
   Le vendeur de l'appareil assure que la durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce type de distributeur est de 10 mois.

   (1) Que vaut λ ?
   (2) Calcule la probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois.
   (3) Sachant que le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, quelle est la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année ?

3. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ . La courbe de la fonction densité correspondante est donnée ci-dessous. Le point de coordonnées $(0;2)$ appartient à cette courbe.



(1) Détermine la valeur de λ.

(2) L'égalité $p(X<0,5)=p(X\geq 0,5)$ est-elle vraie ? Justifie ta réponse.

(3) Détermine la valeur de t pour laquelle $p(X<t)=p(X\geq t)$.

4. Dans le magasin où elle va retirer ses colis commandés sur Internet, Tessa sait qu'elle attend en moyenne 4 minutes.

   On sait que la durée d'attente, en minutes, peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

   (1) Détermine la valeur de λ.

   (2) Tessa vient retirer un colis,

   a. calcule la probabilité qu'elle attende moins de 2 minutes ;

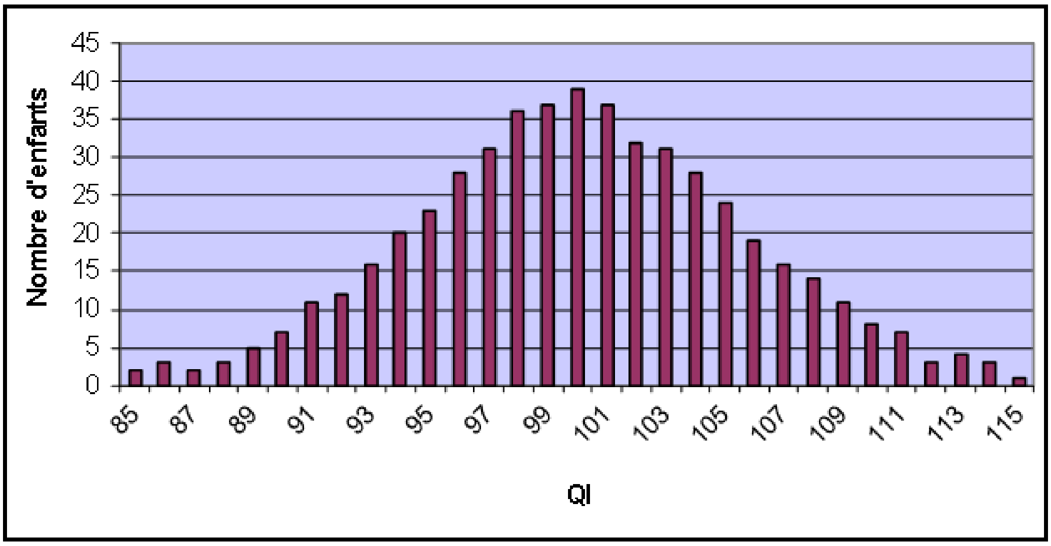
   b. calcule la probabilité qu'elle attende plus de 5 minutes.

Le saviez-vous ? Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant un temps *t* ne change rien à son espérance de vie à partir du temps *t*.

5. Loi normale

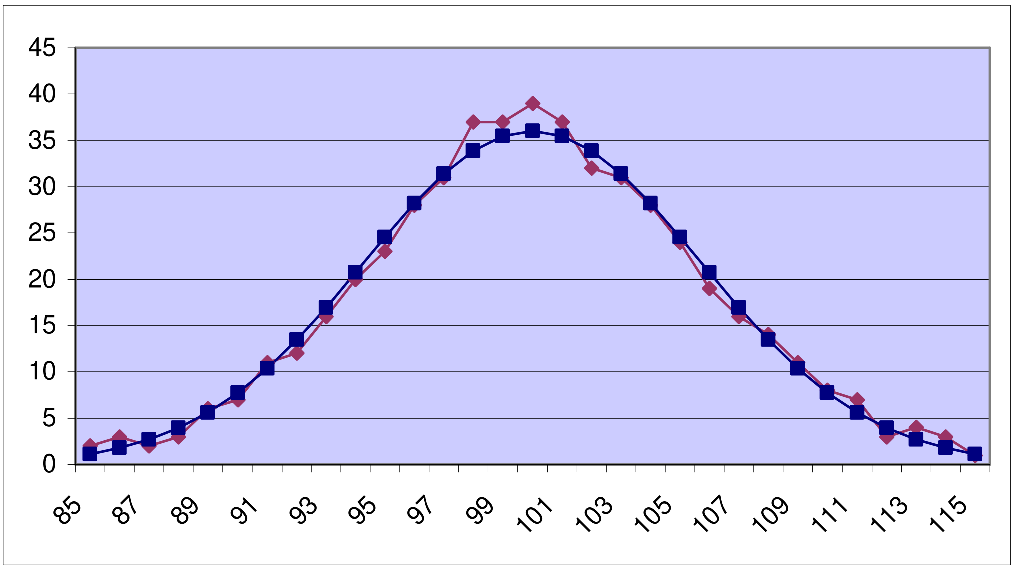
Une **loi de distribution normale** est un mode de répartition que l'on rencontre souvent dans la nature et dans les activités humaines. La variable aléatoire X est une variable continue dont l'ensemble des valeurs est infini.

Exemple : Sur un diagramme en bâtonnets, on a représenté le QI de 515 enfants du même âge dont le QI moyen est de 100 et l'écart-type 5,7.



On observe que les distributions sont plutôt symétriques autour de la moyenne, avec une forme de cloche.

En superposant les sommets des bâtonnets avec les images de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{5,7\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-100)^2}{2.5,7^2}}$ (pour tout naturel compris entre 85 et 115), on obtient le graphique suivant :

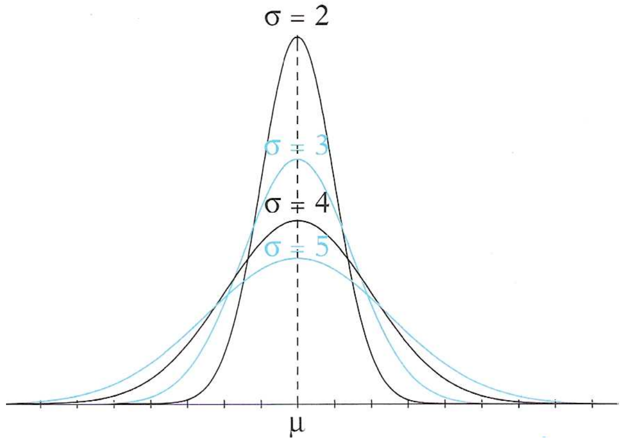


On voit que la variable aléatoire suit un "modèle", il s'agit de la **loi normale**. Celle-ci est caractérisée par deux paramètres : la moyenne, ou espérance, notée μ et l'écart-type σ. On écrit $N(\mu,\sigma)$.

<u>Définition :</u> Une variable aléatoire X suit la **<u>loi normale</u>** de moyenne μ et d'écart-type σ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Le graphique d'une loi normale est une courbe en cloche dont voici les caractéristiques :

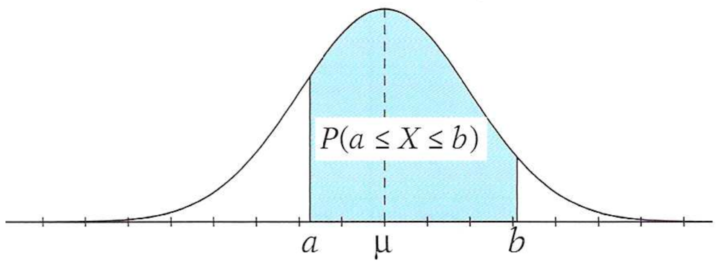


(1) elle est symétrique par rapport à la droite $x=\mu$;

(2) quelle que soit sa forme (plus ou moins aplatie), l'aire comprise entre la courbe et l'axe Ox est toujours égale à 1 ;

(3) le graphe est d'autant plus "aplati" que σ est grand et d'autant plus "pointu" que σ est petit ;

(4) la probabilité qu'un résultat soit compris entre a et b est égale à l'aire sous la courbe entre les droites $x=a$ et $x=b$.

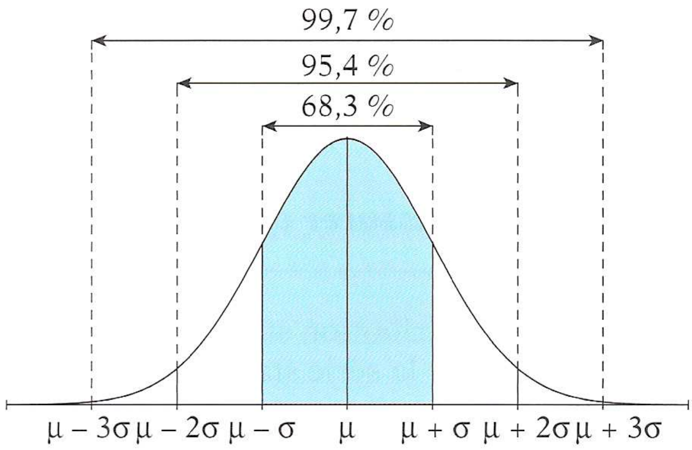


(5) on a toujours

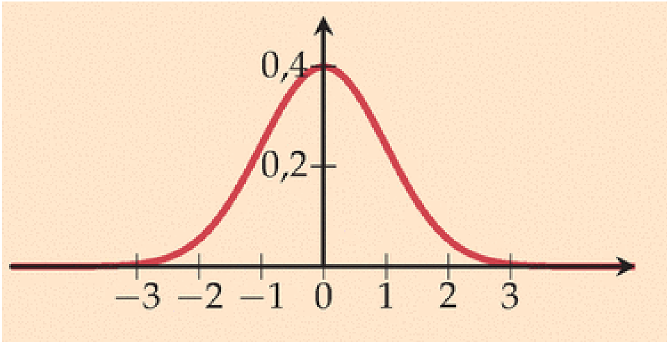
$p(\mu-\sigma\leq X\leq\mu+\sigma)\approx 68,3\,\%$

$p(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)\approx 95,4\,\%$

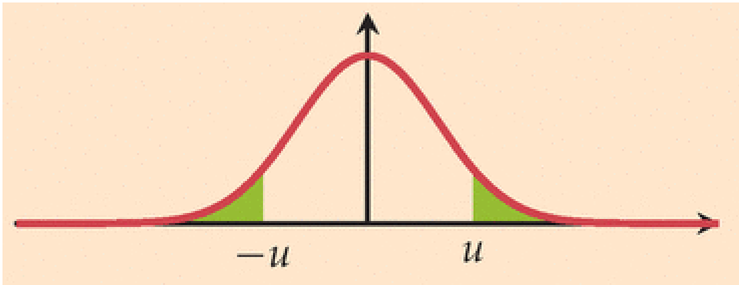
$p(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)\approx 99,7\,\%$



6. Loi normale centrée réduite



Définition : Une variable aléatoire est **centrée** lorsque son espérance vaut $E(X)=0$ et elle est réduite lorsque son écart-type vaut $\sigma(X)=1$.



Propriété : La fonction de densité $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite étant paire, on a, pour tout réel *u* :

$$p(X\le -u)=p(X\ge u).$$

Exemple : Soit *X* une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

(1) Déterminons une valeur approchée de

a. $p(X\le 0,7)$

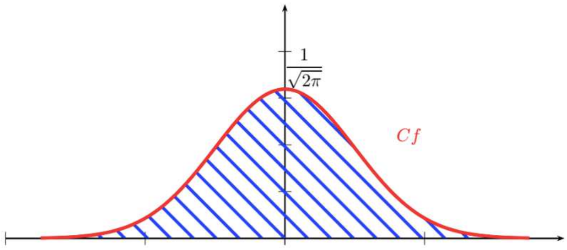
b. $p(2\le X\le 3)$

c. $p(X>-0,2)$

(2) Détermine *t* tel que $p(X\le t)=0,25$.

(3) Détermine u tel que $p(X > u) = 0,4$.

Définition : On dit que X suit la loi normale $\mathscr{N}(\mu;\sigma)$ si $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la **loi normale centrée réduite** $\mathscr{N}(0;1)$.



Exemple : Un fabricant d'ampoules électriques a pu établir que la durée de vie des ampoules suivait approximativement une loi normale : la durée moyenne des ampoules est de 1200 heures et l'écart-type de 200 heures.

On vient d'installer 5000 ampoules neuves dans un hall industriel et on voudrait estimer le nombre d'ampoules hors d'usage au bout de 900 heures.

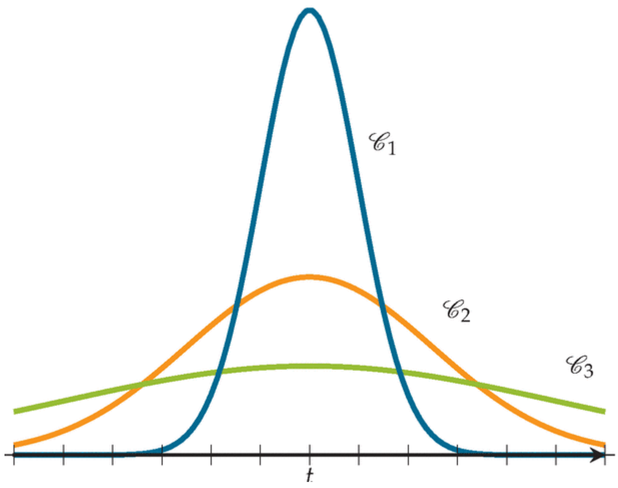
La variable aléatoire X représente la durée de vie des ampoules en heures. Il faut calculer la probabilité qu'une ampoule ait une durée de vie inférieure à 900 heures, c'est-à-dire $p(X \leq 900)$.

Voici comment procéder avec la table de la loi normale centrée réduite :
Pour passer d'une loi normale quelconque $N(\mu,\sigma)$ à la loi normale centrée réduite $N(0,1)$, on effectue un changement de variable.
On pose $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. La variable aléatoire T suit alors une loi normale centrée réduite. Ainsi $p(X \leq x_i) = p(T \leq t_i)$. Et, si nécessaire, on utilise une propriété : $p(T \leq -t_i) = p(T > t_i) = 1 - p(T \leq t_i)$.

On estime donc qu'après 900 heures de fonctionnement, ……….......................... ampoules seront hors d'usage.

7. Exercices

1. On considère les courbes ci-dessous représentant les fonctions de densité de trois variables aléatoires X, Y et Z suivant les lois respectives $N(6;2,5)$, $N(6;5)$ et $N(6;1)$.



   (1) Graphiquement, quelle est la valeur de t ?

   (2) Associe chacune des courbes à la variable aléatoire lui correspondant.

2. On suppose que la température maximale diurne pendant le mois de juillet suit une loi normale de moyenne 20°C et d'écart-type $\sigma = 3°C$.
   Calcule la probabilité que la température soit comprise entre 21°C et 26°C.

3. On suppose que la taille moyenne d'un groupe de 2000 étudiants de 18 ans suit une loi normale de moyenne 1,75 m et d'écart-type de 15 cm. Quelle est la probabilité qu'un de ces jeunes choisi au hasard :

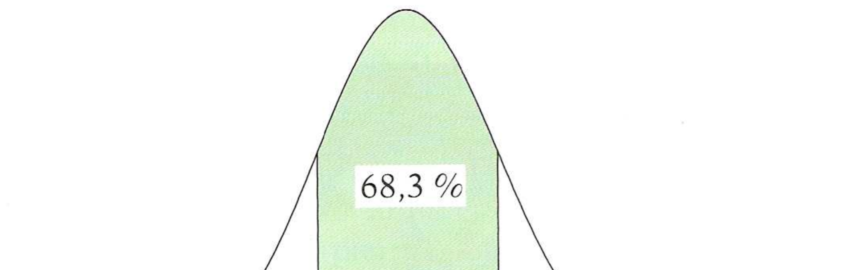
   (1) ait une taille inférieure à 155 cm ?

   (2) ait une taille comprise entre 165 et 180 cm ?

   (3) ait une taille supérieure à 2 m ?

4. Une entreprise fabrique des rondelles métalliques. Une rondelle est conforme si son diamètre est compris entre 5 et 7 millimètres.
   On suppose que le diamètre, en millimètres, d'une rondelle suit une loi normale de moyenne 6 et d'écart-type 0,5.
   (1) Détermine la probabilité qu'une rondelle soit conforme. Arrondis au millième.
   (2) On suppose que la production de chaque rondelle est indépendante des autres. A combien de rondelles non conformes peut-on s'attendre dans un stock de 500 000 ?
   (3) Le directeur général veut améliorer la qualité de la production. Il souhaite diviser le nombre de rondelles non conformes par deux, en utilisant des machines plus régulières.
   Quelle nouvelle valeur de l'écart-type doit-il viser ? Arrondis au centième.

5. Des observations médicales ont permis d'établir que, dans une population donnée, le nombre de globules rouges d'un individu est distribué suivant une loi normale (voir figure). Les normes précisent que, pour un individu donné, ce nombre doit être compris entre 3,9 et 5,6.
   Dans une population de 100 000 individus, combien y a-t-il de personnes « hors normes » ?



6. Une entreprise spécialisée dans la fabrication de confitures fait appel à des producteurs locaux. A la livraison, l'entreprise effectue un contrôle qualité à l'issue duquel les fruits sont sélectionnés ou non pour la préparation des confitures.
   Cette entreprise conditionne la confiture en pots de 300 grammes.
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque pot de confiture, associe sa masse en gramme.

On admet que X suit une loi normale d'espérance $\mu = 300$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

L'entreprise ne commercialise les pots de confiture que si l'écart entre la masse affichée (c'est-à-dire 300 g) et la masse réelle ne dépasse pas 4 grammes.

(1) On prélève un pot au hasard. Détermine la probabilité que le pot soit commercialisé.

(2) Détermine le réel a tel que $p(X < a) = 0{,}99$.

7. Pour des raisons de logistique, les organisateurs d'un marathon ont décidé de modéliser le temps de parcours (en heures) de chacun des 2000 participants par la loi normale de paramètres $\mu = 3{,}5$ et $\sigma = 0{,}5$.

(1) Les organisateurs ont décidé d'installer le ruban sur la ligne d'arrivée deux heures après le départ du marathon.
Selon ce modèle, quelle est la probabilité qu'un coureur pris au hasard termine la course avant l'installation du ruban ?

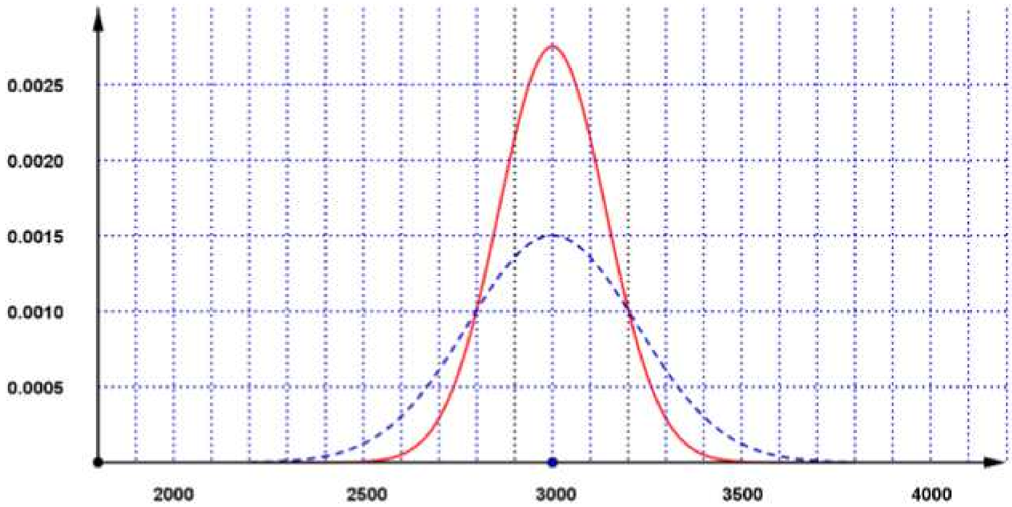
(2) Les organisateurs souhaitent commencer la cérémonie de remise des médailles pour les trois premiers coureurs quand 95 % des coureurs sont arrivés.
Au bout de combien de temps doivent-ils prévoir de le faire ?

8. Une étude est menée par une association de lutte contre la violence routière. Des observateurs, sur un boulevard d'une grande ville, se sont intéressés au comportement des conducteurs d'automobile au moment de franchir un feu tricolore.
On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de voitures par heure à proximité du feu.
On admet que X suit une loi normale de moyenne 3000 et d'écart-type 150.

(1) Détermine la probabilité de compter plus de 3100 voitures par heure à cet endroit.

(2) A un autre endroit du boulevard, à proximité d'un pont, la variable aléatoire Y qui compte le nombre de voitures par heure suit une loi normale de moyenne 3000 et d'écart type σ strictement inférieur à 150.

Sur le graphique ci-dessous, la courbe des deux variables aléatoires est représentée.



Détermine à quel endroit du boulevard, à proximité du feu ou du pont, la probabilité qu'il passe en une heure, entre 2800 et 3200 voitures, est la plus grande.

Le saviez-vous ?

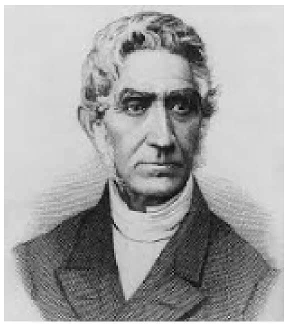
Le célèbre mathématicien allemand Karl Friedrich Gauss (1777-1855) conçoit une loi statistique continue, appelée loi normale ou loi de Laplace-Gauss, dont la répartition est représentée par la fameuse courbe en cloche.

L'adjectif « normale » s'explique par le fait que cette loi décrit et modélise des situations statistiques aléatoires concrètes et naturelles.

Le saviez-vous ?

Adolphe Quételet (1796-1874), mathématicien belge, est le premier à utiliser la loi normale pour étudier des données sociales et biologiques.

Partant d'analyses sur la taille de soldats français et sur le tour de poitrine de soldats écossais, il remarque une grande ressemblance entre ces deux distributions (appelées aujourd'hui « distributions normales »).



E. Approximations de la loi binomiale

1. La loi de Poisson

La loi de Poisson est une loi de probabilité qui s'applique aux variables aléatoires discrètes définies par le nombre d'événements observés dans le cas où...

- le nombre d'épreuves est très grand.
- ces événements sont rares et ont donc peu de chance de se produire, leur probabilité p est donc nettement plus petite que $(1-p)$,
- ces événements se produisent de manière aléatoire dans le temps et dans l'espace,

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ $(\lambda > 0)$ si

$$p(X = k) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!} .$$

La loi de Poisson n'est donc définie que par un seul paramètre λ qui est à la fois l'espérance et la variance.

<u>Exemple :</u> Dans une agence de voyages, le nombre de personnes se présentant quotidiennement au bureau des voyages d'affaires suit une loi de Poisson.
En moyenne, 8 personnes se présentent chaque jour.
Calculons la probabilité des événements suivants :

(1) Au plus 5 personnes se présentent le mardi 23 avril.

(2) Il ne viendra personne le matin du 24 avril.

(3) Il vient au moins 6 personnes la deuxième semaine d'avril.

Une loi binomiale est caractérisée par deux paramètres : n, le nombre de répétition d'une épreuve de Bernoulli, et p, la probabilité d'un succès.
Lorsque le nombre n est élevé, le calcul des nombres C_n^k devient fastidieux.

Lorsque le nombre d'épreuves est élevé $(n \geq 30)$ et que la probabilité d'un succès est faible $(p \leq 0{,}1)$, on peut avoir une approximation de la loi binomiale $B(n,p)$ par la **loi de Poisson**, plus maniable que la loi binomiale. Elle est donnée par la relation :

$$p(X=k)=e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!} \text{ dans laquelle } \lambda = n.p\,.$$

On a : $E(X)=\lambda=n.p$ et $\sigma(X)=\sqrt{n.p.(1-p)}$.

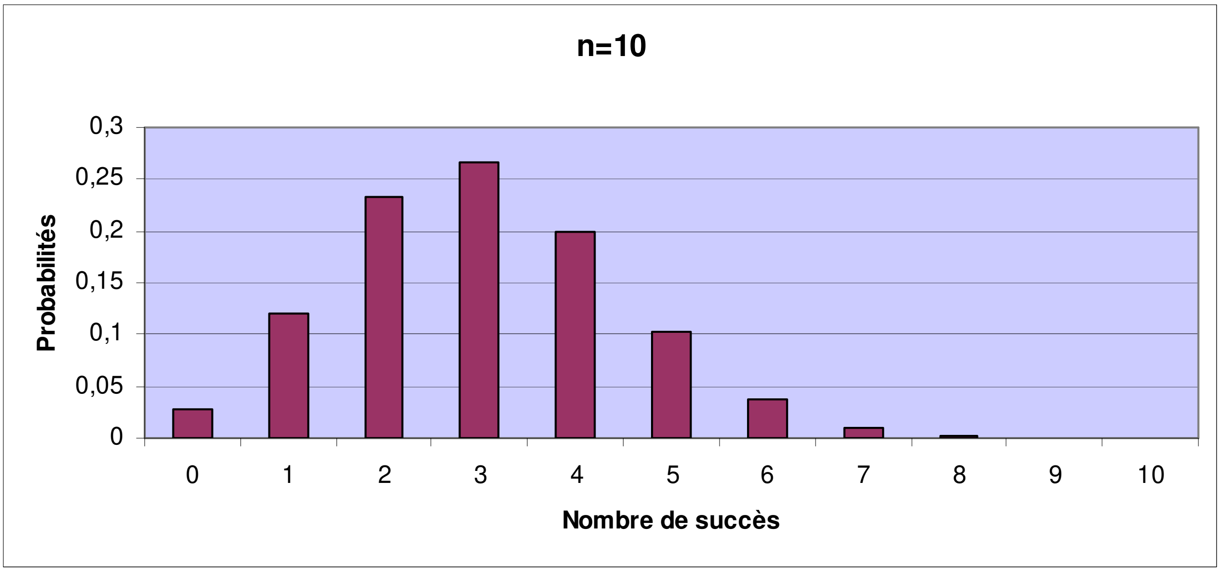
Exemple : Dans le tableau ci-dessous, on a calculé, à la deuxième ligne, quelques probabilités d'une variable aléatoire binomiale de moyenne 100 et d'écart-type 0,1.
La troisième ligne est calculée avec une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 100 \times 0{,}1 = 1$.

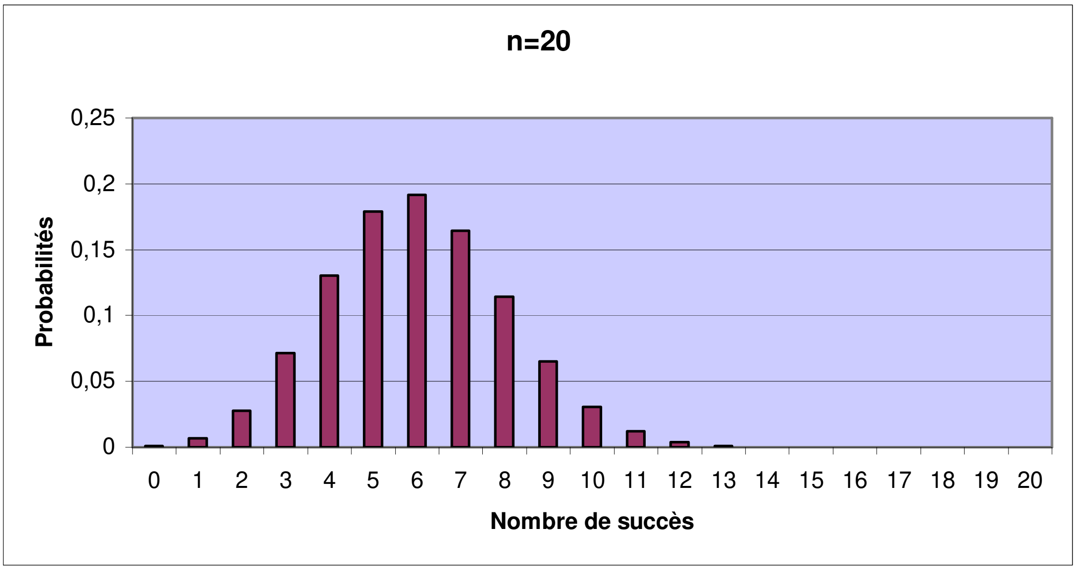
K		0	1	2	3	4	5
$p(X=k)$	Loi binomiale	0,366032	0,36973	0,184865	0,060999	0,014942	0,002898
	Loi de Poisson	0,367879	0,367879	0,18394	0,061313	0,015328	0,003066

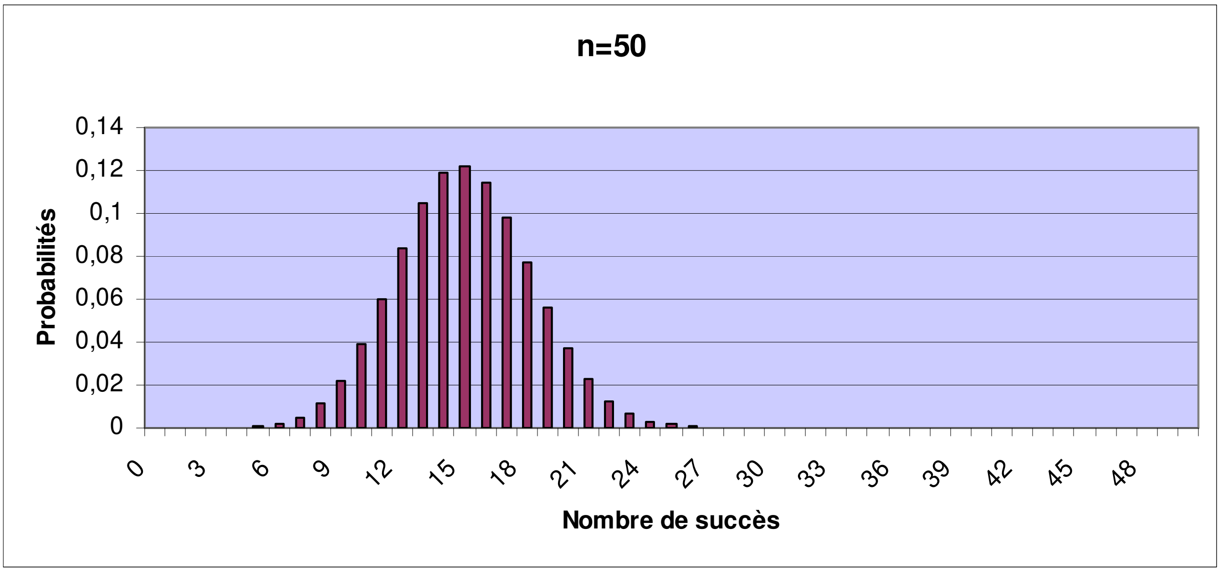
On remarque rapidement que la loi de Poisson est effectivement une bonne approximation de la loi binomiale.

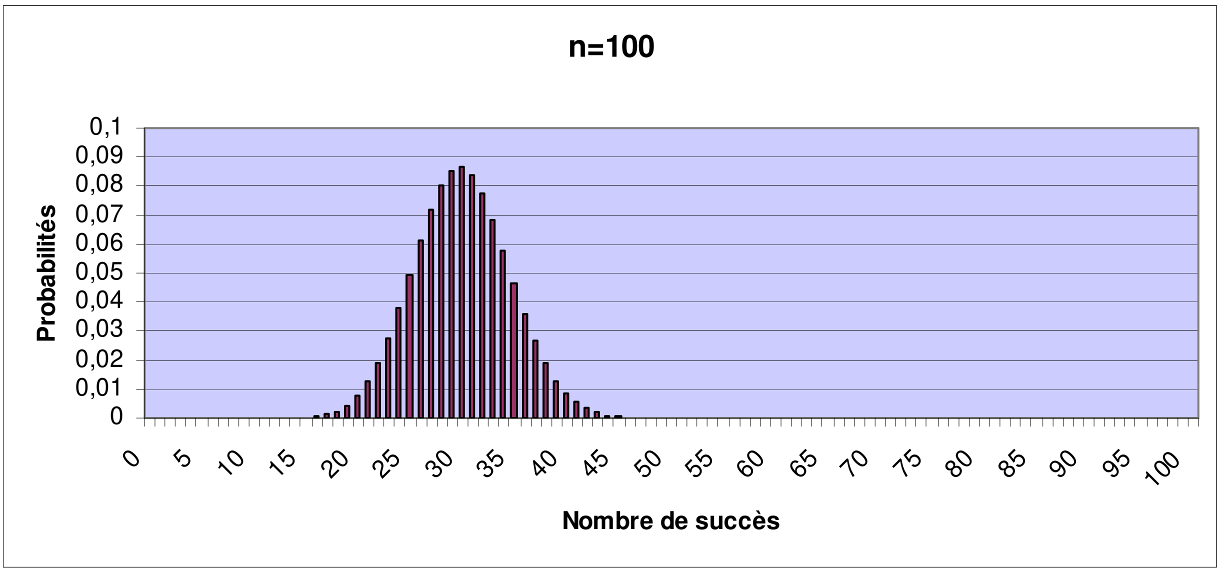
2. Loi normale

Observons comment évolue une distribution binomiale dont la probabilité de succès vaut 0,3.




n=20
Probabilités
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Nombre de succès

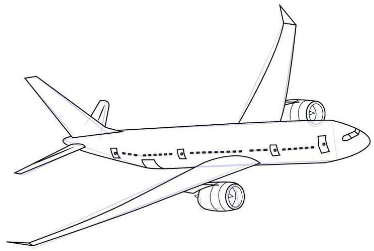

n=50
Probabilités
0,14
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33 36 39 42 45 48
Nombre de succès


n=100
Probabilités
0,1
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100
Nombre de succès

Lorsque n grandit, on constate que le diagramme en bâtonnets de la distribution binomiale présente la même allure que la courbe de Gauss.

Lorsque le nombre d'épreuves est élevé $(n > 40)$ et que la probabilité d'un succès est proche de $0{,}5\,(0{,}3 < p < 0{,}7)$, la **loi normale** $N(\mu,\sigma)$ de paramètres $\mu = n.p$ et $\sigma = \sqrt{n.p.(1-p)}$ peut être utilisée pour avoir une approximation de la loi binomiale $B(n, p)$.

3. Exercices



1. Une compagnie aérienne utilise des avions d'une capacité de 320 passagers. Une étude statistique montre que 5 passagers sur 100 ayant réservé ne se présentent pas à l'embarquement.

   (1) La compagnie accepte 327 réservations sur un vol.
   Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Quels sont ses paramètres ?
   b. On peut approcher cette loi par une loi normale. Détermine ses paramètres.
   c. En utilisant l'approximation par la loi normale, calcule $p(X \leq 320)$.
   d. Penses-tu que le risque pris par la compagnie en acceptant 327 réservations soit important ?

   (2) La compagnie accepte 337 réservations sur ce même vol d'une capacité de 320 passagers.
   310 personnes sont déjà présentes à l'embarquement. Quelle est la probabilité que moins de 320 personnes se présentent en tout à l'embarquement ?

2. Un ingénieur souhaite acheter une machine permettant de fabriquer en séries des cotons-tiges.

   Le fabricant indique que le coton se détache de la tige dans 0,05 % des cas, rendant le produit défectueux.

   L'ingénieur a pour intention de faire fonctionner cette machine pendant 10 ans, pour produire 5 milliards de cotons-tiges.

   On suppose que le fait qu'un coton-tige soit défectueux est indépendant de l'état des autres cotons-tiges.

   On note X le nombre de cotons-tiges défectueux que produira la machine pendant ces 10 ans.

   (1) Quelle loi suit X ? Précise ses paramètres.

   (2) Peut-on déterminer la probabilité qu'au plus 2 504 000 cotons-tiges soient défectueux à l'aide de la calculatrice ou du tableur ?

   (3) Détermine l'espérance et la variance de X.

   (4) Par approximation, on suppose que la variable aléatoire T donnant le nombre, en milliards, de cotons-tiges défectueux suit une loi normale de paramètres $\mu = 2,5 \times 10^3$ et $\sigma = 1,6 \times 10^6$.

   Détermine une valeur approchée de la probabilité qu'au plus 2 504 000 cotons-tiges soient défectueux.

3. Dans une revue, on peut lire : « On estime à 60,5 % le pourcentage de Français partant au moins une fois en vacances dans le courant de l'année ».

   (1) On considère 100 personnes prises au hasard dans la population française.

   On désigne par X la variable aléatoire mesurant, parmi ces 100 personnes, le nombre de celles qui ne partent pas en vacances durant le courant de l'année.

   a. Explique pourquoi X suit une loi binomiale et précise les paramètres de cette loi.

   b. Calcule l'espérance et l'écart-type de X.

   c. Calculer $p(X = 45)$.

(2) On décide d'approcher cette loi par la loi normale $N(39{,}5;4{,}89)$. Soit Y la variable aléatoire suivant cette loi.

a. Calcule une valeur approchée de l'événement « 45 personnes parmi les 100 ne partent pas en vacances dans le courant de l'année », c'est-à-dire $p\left(44{,}5 \leq Y \leq 45{,}5\right)$.

b. Calcule une valeur approchée de l'événement « au plus 30 personnes parmi les 100 ne partent pas en vacances durant le courant de l'année », c'est-à-dire $p\left(Y \leq 30{,}5\right)$

Table de la loi normale centrée réduite : $\mathcal{N}(0;1)$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	.0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	.0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0.9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	6,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	.0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998