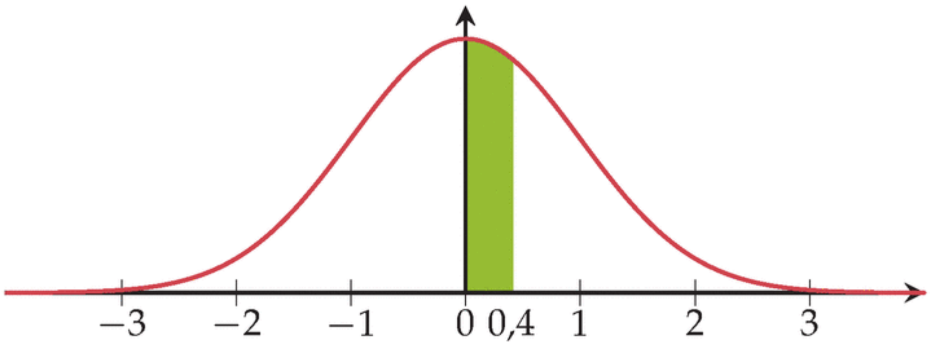
1. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty;+\infty[$ est représentée ci-dessous :



On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $p(0 \leq X \leq 0{,}4) = 0{,}155$.

Donne une valeur approchée de :

(1) $p(-0{,}4 \leq X \leq 0)$

(2) $p(X > 0{,}4)$

(3) $p(X \leq 0{,}4)$

(4) $p(-0{,}4 \leq X \leq 0{,}4)$

2. On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = k.\cos x$ où $k \in \mathbb{R}$.

(1) Détermine le réel k pour que f soit une fonction de densité de la variable aléatoire X sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

(2) Détermine le réel $a \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $p(-a \le X \le a) = \frac{1}{2}$.

(3) Calcule l'espérance de X. ($E(X) = \int_a^b x.f(x)dx$)

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(1) A quelles conditions sur a et b la fonction f est-elle la densité d'une variable aléatoire continue ?

(2) On suppose que a et b vérifient les conditions déterminées à la question précédente. Soit X une variable aléatoire de densité f. on suppose que $p(X \ge 0,5) = \frac{7}{8}$. En déduire a et b.

(3) Calcule $E(X)=\int_0^1 x.f(x)dx$ et $V(X)=\int_0^1 x^2.f(x)dx-(E(X))^2$ en utilisant les valeurs de a et b obtenues à la question précédente.

4. Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle [1 ;11].

(1) Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre 3 et 5 minutes ?

(2) Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de 8 minutes à la caisse ?

(3) Précise le temps d'attente moyen à la caisse.

5. On remplit un verre de 20 cl de volume d'une quantité aléatoire d'eau choisie uniformément entre 0 et 20 cl.
   (1) Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 5 cl d'eau ?

   (2) On vide 5 verres ainsi remplis dans une bassine. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-on dans la bassine ?

6. Un fabricant d'ordinateurs portables souhaite vérifier que la période de garantie qu'il doit associer au disque dur correspond à un nombre pas trop important de retours de ce composant sous garantie. Des essais en laboratoire ont montré que la loi suivie par la durée de vies, en années, de ce composant est la loi exponentielle de moyenne 4.
   (1) Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne sans défaillance plus de 4 ans ?

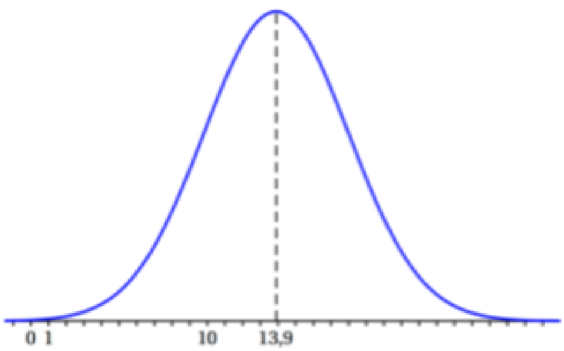
   (2) Quelle est la probabilité que la durée de vie du disque dur appartienne à l'intervalle $\left[E(X)-\sigma;E(X)+\sigma\right]$?

(3) Pendant combien de temps, 50 % des disques durs fonctionnent-ils sans défaillance ?

7. Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une certaine machine suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède 2 heures ?

8. Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes Français âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire X suivant une loi normale dont la fonction de densité est représentée ci-dessous.



(1) Que vaut la moyenne μ ?

(2) On sait que $p(X \geq 22) = 0,023$.

a. En exploitant cette information, hachure sur le graphique, deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023.

b. Calcule la valeur de l'écart-type σ.

c. Calcule $p(5{,}8 \leq X \leq 22)$.

(3) On choisit un jeune Français. Quelle est la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine ?

9. En France, la température moyenne en degrés Celsius d'une journée d'octobre suit la loi normale de paramètres $\mu = 15$ et $\sigma = 3$.

   (1) Détermine la probabilité que lors d'une journée d'octobre la température soit comprise entre 12°C et 18°C.

   (2) Benoît et Sylvie vont se marier un samedi d'octobre. Ils espèrent que la température sera supérieure à 18°C sans dépasser les 21°C. Que peut-on leur dire ? (D'un point de vue probabiliste, évidemment !)

2. Une machine permet le conditionnement d'un jus de fruit dans des bouteilles.

   La quantité de jus injecté dans une bouteille par la machine, exprimée en ml, est modélisée avec une variable aléatoire X.

   On admet que celle-ci suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

   On prélève une bouteille au hasard en fin de chaîne de remplissage.

   (1) Détermine $p(X \leq 496)$ et donne une interprétation du résultat obtenu dans ce contexte.

   (2) Détermine la probabilité que la bouteille ait un contenu compris entre 497 et 500 ml.

   (3) Comment choisir α afin que $p(500 - \alpha \leq X \leq 500 + \alpha)$ soit égale à 0,95 ?

(4) Une association de consommateurs a testé un lot de 200 bouteilles issues de cette chaîne de production. Il a été constaté que 15 bouteilles contenait contiennent moins de 500 ml de jus de fruit contrairement à ce qui est annoncé sur l'étiquetage.

L'entreprise qui assure le conditionnement de ce jus de fruit affirme que 97 % des bouteilles produits contiennent au moins 500 ml de jus de fruit.

Le test réalisé par l'association remet-il en cause l'affirmation de l'entreprise ?