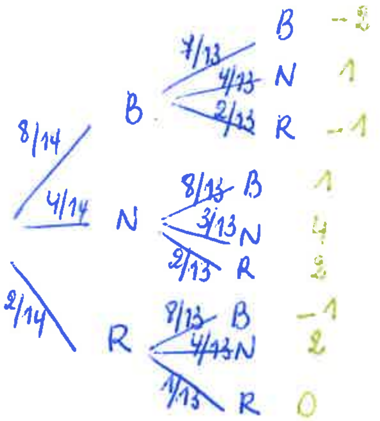
LOIS DE PROBABILITÉ

Lois de probabilité discrètes

C. SCOLAS

https://bit.ly/3RjP2Fy

1. Une urne contient 8 boules blanches, 4 noires et 2 rouges. Un joueur extrait simultanément 2 boules de l'urne. Il gagne 2 € par boule noire et perd 1 € par boule blanche. La variable aléatoire X représente le gain du joueur. Donne la loi de probabilité de X.



x_i	-2	-1	0	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{13}$	$\frac{16}{91}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{32}{91}$	$\frac{8}{91}$	$\frac{6}{91}$

2. On considère le lancer d'un dé truqué dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X=x_i)$	a	$2a$	$3a$	$3a$	$2a$	a

(1) A quelle condition sur a ce tableau définit bien une loi de probabilité ?

$$a+2a+3a+3a+2a+a=1$$
$$12a=1$$
$$a=\frac{1}{12}$$

(2) Calcule l'espérance mathématique de la variable aléatoire. Indique ton calcul.

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{12}$$
$$=\frac{23}{6}$$

(3) Calcule l'écart-type. Indique ton calcul.

$$V(X)=\left(1-\frac{23}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+\left(2-\frac{23}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(3-\frac{23}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(4-\frac{23}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(5-\frac{23}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(6-\frac{23}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{12}$$
$$=\frac{73}{36}$$
$$\rightarrow \sigma=\sqrt{V(X)}=1{,}42$$

3. On lance deux dés et la variable aléatoire *X* indique la différence positive ou nulle entre les deux dés. Donne la loi de probabilité de X.

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

4. Un lascar te propose le jeu suivant : « Je lance deux pièces en l'air. Si on voit deux piles, je te donne 3 euros, dans les autres cas, tu me donnes 1 euro. »

Ce jeu est-il équitable ? Utilise un argument mathématique pour expliquer ta réponse.

$X = $ " gain "

x_i	-1	3
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Comme $E(X) = -1.\frac{3}{4} + 3.\frac{1}{4} = 0$, ce jeu est équitable.

5. Un sac contient 5 jetons numérotés 1, 1, 2, 2, 3. On vous propose le jeu suivant :

Vous tirez un jeton au hasard et vous recevez alors une somme d'argent (positive ou négative !) égale au carré du nombre tiré diminué de 4 €.

Cette proposition est-elle avantageuse ?

$X = $ " gain "

x_i	-3	0	5
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Comme $E(X) = -3.\frac{2}{5} + 0.\frac{2}{5} + 5.\frac{1}{5} = -\frac{1}{5} < 0$, cette proposition n'est pas avantageuse pour le joueur.

6. Un pépiniériste conditionne des bulbes de fleurs. On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit. On considère que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,83. Il prélève au hasard successivement quinze bulbes de ce stock. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de bulbes qui germent.

(1) Explique pourquoi X suit une loi binomiale et donne les paramètres.

X suit une loi binomiale car il n'y a que 2 issues possibles: Succès : "le bulbe germe" et Echec : "le bulbe ne germe pas".

On a $n = 15$ et $p = 0,83$.

(2) Quelle est la probabilité qu'exactement 5 bulbes choisis germent ?

$$p(X=5) = C_{15}^{5} \cdot 0,83^{5} \cdot 0,17^{10}$$
$$= 2,38 \cdot 10^{-5}$$

(3) Quelle est la probabilité qu'au moins 3 bulbes germent ?

$$p(X \geq 3) = 1 - p(X=0) - p(X=1) - p(X=2)$$
$$= 1 - C_{15}^{0} \cdot 0,83^{0} \cdot 0,17^{15} - C_{15}^{1} \cdot 0,83^{1} \cdot 0,17^{14} - C_{15}^{2} \cdot 0,83^{2} \cdot 0,17^{13}$$
$$= 1 - 2,86 \cdot 10^{-12} - 2,096 \cdot 10^{-10} - 7,16 \cdot 10^{-9}$$
$$= 0,999$$

(4) En moyenne, sur un prélèvement de 15 bulbes, combien vont germer ?

$$E(X) = n \cdot p$$
$$= 15 \cdot 0,83$$
$$= 12,45$$

7. 60 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 60 personnes de ce groupe.

(1) Calcule la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique.

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$$
$$= 1 - C_{60}^{0} \cdot 0,02192^{0} \cdot 0,97808^{60}$$
$$= 0,74$$

(2) Calcule la probabilité qu'au maximum 2 personnes (2 compris) fassent sonner le portique.

$p(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

$= C_{60}^{0} \cdot 0{,}02192^{0} \cdot 0{,}97808^{60} + C_{60}^{1} \cdot 0{,}02192^{1} \cdot 0{,}97808^{59} + C_{60}^{2} \cdot 0{,}02192^{2} \cdot 0{,}97808^{58}$

$= 0{,}26 + 0{,}36 + 0{,}24 = 0{,}855$

(3) Combien de personnes doit compter le groupe pour que la probabilité qu'au moins une personne fasse sonner le portique soit supérieure ou égale à 0,85 ?

$p(X \geq 1) \geq 0{,}85$

$1 - p(X=0) \geq 0{,}85$

$1 - C_{n}^{0} \cdot 0{,}02192^{0} \cdot 0{,}97808^{n} \geq 0{,}85$

$\ln 0{,}97808^{n} \leq \ln 0{,}15$

$n \geq \dfrac{\ln 0{,}15}{\ln 0{,}97808} = 85{,}6$

→ Il faut 86 personnes

8. La proportion de la population française qui a un groupe sanguin AB est de 3 %. Dans un hôpital, un patient de groupe sanguin AB nécessite une transfusion d'urgence et il n'y a plus de sang AB disponible. X = "nombre de personnes en salle d'attente de groupe AB"

(1) Quelle est la probabilité que parmi les 40 personnes présentes dans la salle d'attente, les médecins trouvent au moins un individu de groupe sanguin AB pour pouvoir effectuer la transfusion ?

$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$= 1 - C_{40}^{0} \cdot 0{,}03^{0} \cdot 0{,}97^{40}$

$= 0{,}70$

(2) Et si on était au Japon, où il y a 10 % de personnes de groupe AB ?

$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$= 1 - C_{40}^{0} \cdot 0{,}1^{0} \cdot 0{,}9^{40}$

$= 0{,}99$

(3) Et à Hawaï où seulement 1 % de la population est de groupe AB ?

$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$= 1 - C_{40}^{0} \cdot 0{,}01^{0} \cdot 0{,}99^{40}$

$= 0{,}33$