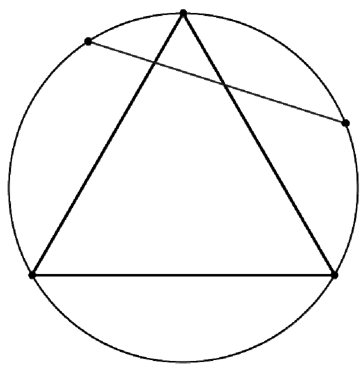
UAA 1 :

Probabilité

Le paradoxe de Bertrand :



Le paradoxe de Bertrand consiste à choisir au hasard une corde d'un cercle donnée et d'estimer la probabilité que celle-ci soit de longueur supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle.

Le paradoxe est que cette probabilité dépend du protocole de choix de la corde.

1ère partie : Analyse combinatoire

Objectifs UAA1 : Probabilité **6ème 6h**

1ère partie : Analyse combinatoire

L'élève doit SAVOIR :

1. Expliquer le principe de multiplication.
2. Définir :
   (1) arrangement avec répétition ;
   (2) arrangement sans répétition ;
   (3) permutation sans répétition ;
   (4) permutation avec répétition ;
   (5) combinaison sans répétition.
3. Donner les formules de :
   (1) B_n^p
   (2) A_n^p (notation factorielle)
   (3) P_n (notation factorielle)
   (4) $P_n^{i,j,\ldots,k}$
   (5) C_n^p
4. Démontrer les propriétés des nombres C_n^p.
5. Donner la formule de Newton et la démontrer.

L'élève doit ETRE CAPABLE DE :

1. Résoudre des exercices faisant intervenir le principe de multiplication, les arrangements, les permutations et les combinaisons.
2. Manipuler les factorielles.
3. Utiliser la formule de Newton pour développer un binôme ou rechercher un terme précis.
4. Construire le triangle de Pascal.

Considérons un jeu de 52 cartes bien mélangées duquel on tire une carte au hasard. Cet événement est élémentaire et chaque carte a la même chance d'être tirée. Par exemple, il y a 1 chance sur 52 de tirer le roi de trèfle ; il y a aussi 4 chances sur 52 de tirer un as… Compter le nombre de chances que chacun de ces événements élémentaires se produise ne présente aucune difficulté particulière car cela ne nécessite aucun calcul.

Prenons maintenant un cas plus courant : celui où le jeu de 52 cartes est distribué entre 4 joueurs (le whist par exemple) et où chaque joueur a donc une "main de 13 cartes", c'est-à-dire qu'il reçoit 13 cartes au début du jeu. Pour connaître, avant que la distribution ne soit faite, le nombre de chances qu'un joueur a de recevoir 3 as (un trou dans le cas du whist), les choses se compliquent tout de même. En effet, il faut calculer le nombre de mains de 13 cartes différentes que l'on peut faire avec un jeu de 52 cartes et ensuite le nombre de mains de 13 cartes contenant exactement 3 as. Si vous avez des insomnies, vous pouvez dénombrer par écrit toutes les séries possibles constituées de 13 cartes… mais s'il fallait recourir à cette méthode pour chaque problème où il est question de déterminer le nombre de résultats possibles d'une expérience particulière un peu compliquée ou le nombre de groupements possibles des éléments d'un ensemble particulier, on en sortirait difficilement !...

Il existe un outil de travail qui permet de répondre plus facilement à ce genre de questions, c'est l'**analyse combinatoire**.

Il s'agit donc d'une branche des mathématiques qui fournit des méthodes de dénombrement particulièrement utiles en théorie des probabilités. Il ne s'agit donc pas d'énumérer toutes les possibilités mais de les compter !

L'une des nombreuses applications de l'analyse combinatoire est le développement du binôme de Newton. Ce dernier est également utilisé dans le calcul des variables aléatoires d'une loi binomiale.

A la fin de ce chapitre, nous serons donc en mesure de répondre à des questions du type : « Combien existe-t-il de nombres de 4 chiffres différents ? » ou « Comment peut-on constituer un comité de 3 élèves dans une classe qui en compte 18 ? ».

A. Principe de multiplication

Ce principe est à la base des techniques de dénombrement. Il permet de compter le nombre de résultats d'une expérience lorsque celle-ci se décompose en une suite d'expériences partielles, réalisées l'une après l'autre.

Principe : Une expérience complète est constituée de k expériences partielles, réalisées l'une après l'autre dans un ordre bien déterminé. On suppose que la première expérience partielle peut produire n_1 résultats, que la deuxième expérience peut produire n_2, la troisième n_3, etc. Alors le nombre total de résultats de l'expérience complète est le produit $n_1.n_2.n_3 \ldots n_k$.

Exemples :

1. Trois routes relient Anvers et Bruges, et quatre routes relient Bruges et Courtrai. De combien de façons peut-on aller d'Anvers à Courtrai, en passant par Bruges ?

2. Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

3. Au poker (on joue avec les 52 cartes), une suite royale est une suite de cinq cartes consécutives, toutes de la même couleur. Combien y a-t-il de suites royales ?

B. Arrangements avec répétition

Définition : Un arrangement avec répétition de n éléments pris p à p est une liste ordonnée, avec répétition éventuelle, de p éléments choisis parmi les n éléments donnés.
Deux arrangements diffèrent l'un de l'autre soit par la nature des éléments, soit par l'ordre des éléments.

Le nombre d'arrangements avec répétition de n éléments pris p à p est noté B_n^p .

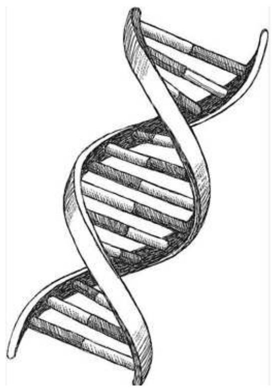
$$\boxed{B_n^p = n^p}$$

Exemples :

1. Combien de nombres de 3 chiffres peut-on écrire en utilisant uniquement les chiffres 5, 6, 7 et 8 ?

2. Combien de mots de six lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet ?

3. L'ADN est constitué d'une séquence de bases azotées qui sont la Thymine (T), l'Adénine (A), la Guanine (G) et la Cytosine (C). Quel est le nombre possible de séquences distinctes constituées de 100 bases ?



C. Arrangements sans répétition

Définition : Un arrangement sans répétition de n éléments pris p à p est une liste ordonnée, sans répétition, de p éléments choisis parmi les n éléments donnés.
Deux arrangements diffèrent l'un de l'autre soit par la nature des éléments, soit par l'ordre des éléments.

Le nombre d'arrangements sans répétition de n éléments pris p à p est noté A_n^p.

$$\boxed{A_n^p = \qquad\qquad\qquad\qquad \text{avec } p \leq n}$$

Exemples :

1. De combien de manières peut-on choisir un président, un secrétaire et un trésorier dans un comité de 10 membres ?

2. Combien y a-t-il de mots (ayant un sens ou non) de 4 lettres différentes ?

3. Combien y a-t-il de mots de 4 lettres différentes commençant par 2 voyelles ?

4. Combien y a-t-il de mots de 4 lettres différentes terminant par 2 consonnes ?

D. Permutations sans répétition

Définition : Une permutation sans répétition de n éléments distincts est une liste ordonnée de ces n éléments.
Deux permutations diffèrent l'une de l'autre par l'ordre des éléments.

Le nombre de permutations sans répétition de n éléments est noté P_n.

$$\boxed{P_n = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Pour faciliter l'écriture, on introduit la notation factorielle :

Définition : Pour tout naturel n,

$$\left| \begin{array}{l} n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1 \\ 0! = 1 \end{array} \right. \quad \text{si } n \neq 0,$$

$n!$ se lit « factorielle de n ».

D'où

- $P_n =$
- $A_n^p =$

Exemples :

1. De combien de façons peut-on disposer 5 tee-shirts de couleurs différentes sur un fil à linge ?
2. Afin d'identifier un agresseur, on fait entrer 7 prévenus dans une salle munie d'une vitre sans tain et on les aligne le long d'un mur, face à la vitre. De combien de manières peut-on aligner les prévenus ?
3. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot NOMBRE ?

E. Manipuler la factorielle

Exerçons-nous à utiliser la notation factorielle !

<u>Exercices :</u>

1. Evalue, si possible (sans calculatrice) :

   (1) $3! =$

   (2) $5! =$

   (3) $(-2)! =$

   (4) $\left(\frac{1}{2}\right)! =$

   (5) $-2! =$

   (6) $(3!)^2 =$

   (7) $\frac{8!}{6!} =$

   (8) $\frac{8!}{6!2!} =$

   (9) $\frac{7!}{5!\,2!} + \frac{7!}{4!\,3!} =$

   (10) $\frac{4! + 5!}{5!} =$

2. Ecris chacune des expressions suivantes sous la forme d'une seule factorielle :

   (1) $(n+1)n!$

   (2) $(n+2)(n+1)!$

   (3) $\frac{(n+7)!}{(n+7)}$

   (4) $\frac{(n-p)!}{(n-p)(n-p-1)}$

3. Résous l'équation $n!=6(n-2)!$

4. Résous l'équation $(n+1)!=132(n-1)!$

Le saviez-vous ? Le mot hasard vient du terme de la langue arabe *az-zahr*, où il désigne le dé à jouer. Par définition, le hasard est imprévisible : quelle folie (ou défi) d'essayer de le mesurer, ce qui n'est rien moins que… l'objet des probabilités !

F. Permutations avec répétition

Combien existe-t-il d'anagrammes du mot REPETE ?

Définition : Une permutation avec répétition de n éléments non nécessairement distincts est une liste ordonnée de ces n éléments.
Deux permutations ne diffèrent l'une de l'autre que par l'ordre des éléments.

Le nombre de permutations avec répétition de n éléments dont l'un est répété i fois, un autre j fois,…, un autre k fois, est noté $P_n^{i,j,\ldots,k}$.

$$\boxed{P_n^{i,j,\ldots,k} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Exemples :

1. Quel est le nombre d'anagrammes du mot CALCULATRICE ?

2. Dans une urne se trouvent 2 jetons rouges identiques, 3 jetons verts identiques et 4 jetons bleus identiques. On tire successivement et sans remise tous les jetons et on note la succession de couleurs obtenue. Combien y a-t-il de successions possibles ?

G. Combinaisons sans répétition

De combien de manières peut-on choisir un ensemble de 3 cartes parmi les cartes suivantes :
1♥, 2♦, 3♠, 4♦, 7♣, 8♥, 9♠ ?

<u>Définition :</u> Une combinaison sans répétition de n éléments pris p à p est une liste non ordonnée, sans répétition, de p éléments choisis parmi les n éléments donnés.
Deux combinaisons ne diffèrent l'une de l'autre que par la nature des éléments.

Le nombre de combinaisons sans répétition de n éléments pris p à p est noté C_n^p.

$$C_n^p = \qquad \text{avec } p \leq n$$

Avec la notation factorielle, on a $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

<u>Exemples :</u>

1. De combien de façons peut-on tirer une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes ?

2. Dans une classe de 14 élèves, il faut 3 volontaires pour balayer la cour. Combien y a-t-il d'équipes possibles ?

3. Une classe est composée de 4 filles et 10 garçons. Combien a-t-on de possibilités pour choisir 2 filles ou 2 garçons ?

4. Une classe est composée de 4 filles et 10 garçons. Combien a-t-on de possibilités pour choisir 2 filles et 2 garçons ?

Propriétés des nombres C_n^p :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ C_n^0 = C_n^n = 1$

2. $\forall n \in \mathbb{N}_0,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

H. Exercices récapitulatifs

1. Associe chaque exemple au type d'arrangements qui convient :

   A : Arrangement avec répétition
   B : Arrangement sans répétition
   C : Permutation sans répétition
   D : Permutation avec répétition
   E : Combinaison sans répétition

1	De combien de façons peut-on placer David, Viviane, Ronald, Normann et Suzanne dans une rangée ?	
2	On lance une pièce 4 fois. Combien de combinaisons pile/face peut-on obtenir ?	
3	Une main de poker est constituée de 5 cartes, dans un jeu de 52 cartes. Combien de mains de poker différentes sont possibles ?	
4	Combien peut-on former d'anagrammes avec les lettres du mot TELEVISION ?	
5	Quel est le nombre de possibilités de former deux équipes différentes de deux joueurs avec sept personnes ?	
6	Combien peut-on former de mots de 3 lettres différentes avec les lettres du mot DEVOIR ?	
7	Avec les chiffres 1, 2, 4, 5, 6 et 9, combien de nombres à 4 chiffres sont possibles ?	

2. Un manufacturier fabrique 5 modèles de souliers en 10 pointures et 3 couleurs. Combien de sortes différentes de souliers fabrique-t-il ? **Sol :** 150

3. Un coffre-fort possède 3 roulettes numérotées de 1 à 25. Un voleur tente d'ouvrir le coffre-fort sans connaître la combinaison.
   (1) Combien existe-t-il de combinaisons ? **Sol :** 15 625
   (2) De combien de façons peut-il se tromper ?

4. Combien de nombres composés de trois chiffres et inférieurs à 500 peut-on former à l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7, si les répétitions
   (1) sont permises ? **Sol :** 196
   (2) ne sont pas permises ? **Sol :** 120

5. Un groupe de 20 personnes doit élire un comité de 4 personnes, choisies parmi tous les membres du groupe. De combien de façons peut-on faire ce choix ? **Sol :** 4 845

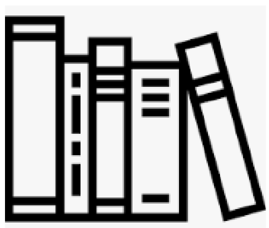
6. Combien de nombres de six chiffres peut-on former à partir des chiffres 0, 1, 3, 5, 6 et 7 ? **Sol :** 38 880

7. Avec les lettres du mot MINERAUX, combien peut-on former de mots différents (répétitions non permises)
   (1) de 8 lettres ? **Sol :** 40 320
   (2) de 8 lettres commençant et se terminant par une consonne ? **Sol :** 8 640

8. De combien de façons 6 enfants peuvent-ils s'asseoir sur une rangée de 6 chaises si 3 d'entre eux refusent d'occuper les extrémités de la rangée ? **Sol :** 144

9. De combien de façons 4 personnes peuvent-elles se partager 12 objets différents s'il est entendu que chacune doit en avoir 3 ? **Sol :** 369 600

10. Cinq drogues ont été administrées dans le but d'apporter un traitement à une maladie. Une expérience est effectuée pour tester l'hypothèse que l'ordre d'administration de ces drogues est important. Combien y a-t-il de façons différentes d'administrer ces cinq drogues ? **Sol :** 120



11. On veut placer 6 livres dans un rayon de bibliothèque. De combien de façons différentes peut-on le faire sachant que :
   (1) 3 d'entre eux sont des volumes qui doivent rester ensemble dans le même ordre ? **Sol :** 24
   (2) 2 volumes donnés ne doivent jamais être voisins ? **Sol :** 480
   (3) l'on a 2 Tintin, 2 Astérix et 2 Lucky Luke et que les livres d'une même collection doivent rester ensemble ? **Sol :** 48
   (4) l'on a 3 Suske en Wiske et 3 Jommeke et que les livres d'une même collection doivent rester ensemble ? **Sol** : 72

12. Dans un groupe de 12 étudiants qui habitent en kot, on doit en choisir 3 pour préparer le repas et 4 autres pour faire la vaisselle. De combien de façons peut-on faire ce choix si 3 de ces étudiants ne savent pas cuisiner ? **Sol :** 10 584

13. Avec les lettres du mot RELATION, combien peut-on former de mots (sans répétition)
    (1) au total ? **Sol :** 40 320
    (2) si les 4 consonnes sont inséparables et toujours dans le même ordre ? **Sol :** 120
    (3) si les 4 consonnes sont inséparables mais dans un ordre quelconque ? **Sol :** 2 880
    (4) si les voyelles et les consonnes alternent ? **Sol :** 1 152

14. Combien peut-on former d'équipes de 6 hommes choisis parmi 4 officiers et 6 soldats si, dans ces équipes, il doit y avoir
    (1) un officier ? **Sol :** 24
    (2) aucun officier ?
    (3) au moins un officier ? **Sol :** 209

15. Considérons le mot MASSACHUSSETS.
    (1) Combien existe-t-il d'anagrammes de ce mot ? **Sol :** 25 945 920
    (2) Parmi ces anagrammes, combien commencent et finissent pas SS ? **Sol :** 181 440
    (3) Parmi ces anagrammes, combien commencent et finissent par S ? **Sol :** 3 326 400

16. Trois personnes s'assoient au comptoir d'un restaurant où les 8 sièges sont libres. De combien de façons différentes peuvent-elles prendre place pour que chacune d'elles se retrouve sans voisin immédiat ? **Sol :** 120

17. A partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes, on compose une main de 5 cartes. Combien existe-t-il de mains
    (1) au total ? **Sol :** 2 598 960
    (2) comprenant 2 valets et 3 rois ? **Sol :** 24
    (3) 5 cœurs ? **Sol :** 1 287
    (4) exactement 3 piques ? **Sol :** 211 926
    (5) au moins un as ? **Sol :** 886 656
    (6) des cartes d'une même couleur (couleurs = pique, trèfle, carreau, cœur) ? **Sol :** 5 148
    (7) un triplet et une paire ? **Sol :** 3 744

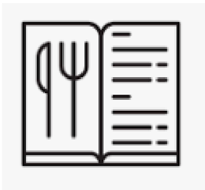
18. A un QCM, on propose 5 réponses à chacune des 10 questions (une seule est correcte). Combien y a-t-il de choix de réponses possibles ? **Sol :** 9 765 625

19. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot TARATATA ? **Sol :** 280

20. Une ligue de baseball est composée de 6 équipes. Combien de classements différents peut-on obtenir à la fin de la saison pour les 4 premières places ? **Sol :** 360

21. A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches : trois lettres A, B, C et les neuf chiffres (de 1 à 9). Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie d'un nombre de 4 chiffres. Par exemple : C 2125.
    (1) Combien y a-t-il de codes différents ? **Sol :** 19 683
    (2) Combien y a-t-il de codes
        a. comportant exactement une fois le chiffre 7 ? **Sol :** 6 561
        b. pour lesquels tous les chiffres sont pairs ? **Sol :** 768
        c. pour lesquels les 4 chiffres sont différents ? **Sol :** 9 072

22. Un menu de restaurant propose : 4 entrées, 11 plats de viande, 8 plats de poisson et 9 desserts. Combien peut-on composer de menus contenant une entrée, un plat et un dessert ? **Sol :** 684



23. Combien y a-t-il de nombres compris entre 100 et 1000 formés de chiffres différents (102 inclus et 1000 exclu) ? **Sol :** 648

24. De huit membres d'un club, nous devons choisir quatre délégués.
    (1) Combien y a-t-il de choix possibles ? **Sol :** 70
    (2) Combien de ces choix contiennent Jules comme membre ? **Sol :** 35
    (3) Combien de ces choix contiennent Jules ou Simon comme membre, sans que les deux soient choisis simultanément, mais l'un des deux doit être choisi ? **Sol :** 40

25. On considère les chiffres de 1 à 9. Combien peut-on former de nombres de 4 chiffres pas nécessairement différents…
    (1) au total ? **Sol :** 6 561
    (2) commençant par 12 ? **Sol :** 81
    (3) impairs ? **Sol :** 3 645
    (4) ne contenant pas 6 et se terminant par 3 ? **Sol :** 512
    (5) comprenant une et une seule fois le chiffre 2 ? **Sol :** 2 048

26. Nous prenons au hasard 3 balles dans un sac qui contient 5 balles rouges, 4 balles blanches et 3 balles noires. Combien existe-t-il de possibilités d'obtenir
    (1) 3 balles de couleurs différentes ? **Sol :** 60
    (2) 3 balles de même couleur ? **Sol :** 15
    (3) exactement 2 balles rouges ? **Sol :** 70
    (4) au moins 2 balles rouges ? **Sol :** 80

27. Soit Jean, Pierre, Hugues, Annie, Chantal et Sophie, six amis qui vont s'asseoir sur un banc pour se faire photographier.
    (1) Combien y a-t-il de possibilités de les asseoir ? **Sol :** 720
    (2) Combien y a-t-il de possibilités si Jean veut être à côté de Sophie ? **Sol :** 240
    (3) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons restent groupés ? **Sol :** 144
    (4) Combien y a-t-il de possibilités si les garçons occupent les places paires ? **Sol :** 36
    (5) Combien y a-t-il de possibilités si Jean est placé tout à gauche du banc ? **Sol :** 120
    (6) Combien y a-t-il de possibilités si Jean veut être à côté de Sophie et à sa droite ? **Sol :** 120
    (7) Combien y a-t-il de possibilités si Jean ne veut pas être à côté de Chantal ? **Sol :** 480
    (8) Combien y a-t-il de possibilités si les six amis sont placés dans l'ordre alphabétique ?
    (9) Combien y a-t-il de possibilités si Pierre veut s'asseoir entre Annie et Chantal ? **Sol :** 48
    (10) Combien y a-t-il de possibilités si Pierre ne veut pas être en bout de banc ? **Sol :** 480
    (11) Combien y a-t-il de possibilités si Jean, Pierre et Hugues restent côte à côte et dans cet ordre-là ? **Sol :** 24

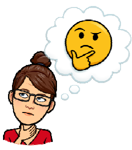
28. Combien d'anagrammes du mot TRIANGLE contiennent le mot AIR ? **Sol :** 720

29. Il s'agit de construire un mot de sept lettres différentes avec les lettres du mot PLANTES.
    (1) Combien en existe-t-il ? **Sol :** 5 040
    (2) Combien d'entre eux commencent par la lettre S ? **Sol :** 720
    (3) Combien contiennent la lettre E suivie de la lettre T ? **Sol :** 720
    (4) Combien ne commencent pas par la lettre P ? **Sol :** 4 320
    (5) Combien y en a-t-il dont les voyelles sont séparées par exactement deux lettres ? **Sol :** 960

30. *Google Form* : « Analyse combinatoire » :
    https://forms.gle/Gfxu2ewLHECAktVJA

Le saviez-vous ?

Encore inimaginable il y a quelques années, depuis 2016, le logiciel AlphaGo peut mettre les meilleurs joueurs au jeu de Go. Il fonctionne grâce à l'intelligence artificielle et a appris à jouer en simulant des millions de parties aléatoires contre lui-même.



Pour chercher :

Résous dans $\mathbb{N}$ l'équation $C_n^3 - C_n^2 = \dfrac{n^3 - 6n^2}{6} + 5$.

Sol : $n = 6$

I. Le triangle de Pascal

1. Tableau

Le **<u>triangle de Pascal</u>** est un tableau à double entrée où sont placés les valeurs des nombres C_n^p, à l'intersection de la $n^{\text{ème}}$ ligne et de la $p^{\text{ème}}$ colonne.

Puisque les nombres C_n^p ne sont définis que pour $p \leq n$, ce tableau est triangulaire.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	***p***	**…**
0	C_0^0								
1	C_1^0	C_1^1							
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2						
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3					
…									
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	…	C_n^p	…
…									

<u>Propriétés :</u>

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ C_n^0 = C_n^n = 1$

   <u>Démonstration :</u>

2. $\forall n \in \mathbb{N}_0,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

   <u>Démonstration :</u>

3. **Formule de symétrie** : $\forall n, p \in \mathbb{N}_0$, si $p \leq n$, alors $C_n^p = C_n^{n-p}$

   <u>Démonstration :</u>

4. **Formule de Pascal** : $\forall n, p \in \mathbb{N}_0$, si $p \leq n$, alors $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$

   <u>Démonstration :</u>

Ces quatre propriétés permettent de construire le triangle de Pascal sans faire de calculs fastidieux ! En effet, on en déduit que :

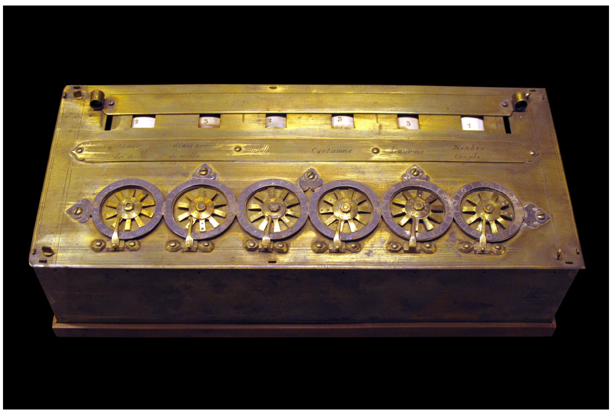
- la première colonne et la diagonale sont composées uniquement de 1 ;
- la deuxième colonne du tableau est constituée des naturels (le numéro de la ligne indiquant la valeur de la cellule) ;
- les lignes du tableau sont symétriques ;
- un terme quelconque du tableau est égal à la somme de celui est placé juste au-dessus de lui (même colonne) et de celui qui est immédiatement à gauche de ce dernier :

C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}
	C_n^p

On a donc :

*n**p*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Le saviez-vous ? 1642 : Pascal construit « la Pascaline », première machine à calculer mécanique. Cet objet, que l'on peut toujours voir à Clermont-Ferrand, a été offert par le jeune Pascal à la reine Christine de Suède.



2. Applications

(1) Le binôme de Newton

Le triangle de Pascal permet de développer $(x+y)^n$.
En effet,

pour $n=0$, $(x+y)^0 =$

pour $n=1$, $(x+y)^1 =$

pour $n=2$, $(x+y)^2 =$

pour $n=3$, $(x+y)^3 =$

etc.

On remarque que :

- les coefficients des termes du développement de $(x+y)^n$ sont les coefficients de la ligne numéro *n* du triangle de Pascal ;
- les exposants des puissances de *x* vont en décroissant, de *n* à 0 ;
- les exposants des puissances de *y* vont en croissant, de 0 à *n* ;
- la somme des exposants des puissances de *x* et des puissances de *y* vau*t* n.

Ainsi, on peut écrire :

$(x+y)^2 =$

$(x+y)^3 =$

En généralisant, on obtient la **formule de Newton** dont le terme général est $C_n^k x^{n-k} y^k$:

$$\boxed{\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \\ &= C_n^0\, x^n + C_n^1\, x^{n-1}\, y + C_n^2\, x^{n-2}\, y^2 + \ldots + C_n^{n-1}\, x\, y^{n-1} + C_n^n\, y^n\end{aligned}}$$

Démonstration :

Exemples :

1. Développons $\left(x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^4$.

2. Déterminons le coefficient de x^2 dans le développement de $\left(3x-\dfrac{2}{x}\right)^6$.

Exercices :

1. Développe $(2x+3)^5$ en utilisant la formule de Newton.
2. Développe et simplifie :

   (1) $(x+2)^7$

   (2) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^3$

3. Soit le binôme $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^9$.

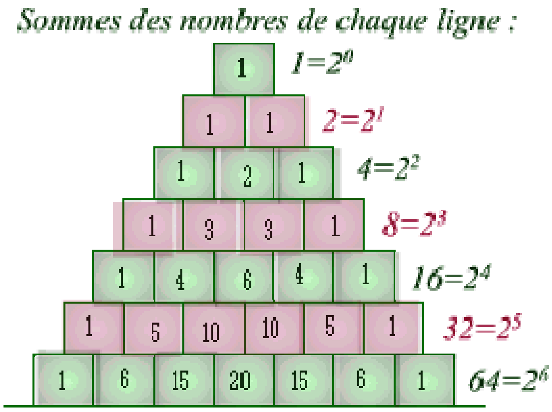
   (1) Détermine le quatrième terme du développement de ce binôme.

   (2) Détermine le terme en x du développement de ce binôme.

4. Quel est le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$? Indique tes calculs.
5. Quel est le coefficient de x^6 dans $(x^2-3)^7$? Indique tes calculs.
6. Calcule le coefficient en x dans le développement de $\left(2x^2-\dfrac{4}{x}\right)^5$.

(2) Triangle de Pascal et puissances de 2

Si on additionne les nombres composant les lignes du triangle de Pascal, on obtient les puissances de 2 ; l'exposant étant donné par le numéro de la ligne.



(3) Triangle de Pascal et puissances de 11

Si on écrit les éléments du triangle de Pascal sans espace, on peut obtenir la suite de nombres suivante :

1 ; 11 ; 121 ; 1331 ; 14 641 ; 15 101 051 ; …

Qui sont, de manière évidente pour les 5 premiers éléments, les puissances de 11 :

$$1 = 11^0 \;;\; 11 = 11^1 \;;\; 121 = 11^2 \;;\; 1331 = 11^3 \;;\; 14641 = 11^4 .$$

Si on sait que $11^5 = 161\,051$, comment peut-on obtenir ce nombre à l'aide de la suite de chiffres donnée par le triangle de Pascal (15 101 051) ?

Les 5 premières lignes donnent directement les chiffres formant les puissances de 11, jusqu'à la 4ème puissance. A partir de la 6ème ligne, on voit apparaître des nombres à au moins 2 chiffres dans le triangle. Or, dans le système décimal, la suite de chiffres composant un nombre représente les coefficients des différentes puissances de 10 qu'il faut additionner pour obtenir le nombre. Il suffit donc d'écrire cette somme sous forme de calcul écrit pour obtenir

$$\begin{array}{r}
1.10^5 = 100\,000 \\
5.10^4 = 50\,000 \\
10.10^3 = 10\,000 \\
10.10^2 = 1\,000 \\
5.10^1 = 50 \\
1.10^0 = 1 \\
\hline
161\,051
\end{array}$$

Le saviez-vous ?

Dès le IXe siècle, à partir des travaux d'Al-Khwarizmi (v. 780- v.850), les mathématiciens arabes vont raisonner directement sur des quantités abstraites et ainsi développer une toute nouvelle branche des mathématiques : l'algèbre.

Médecin et mathématicien, as-Samaw'al (v. 1130 – v. 1180) rédige le traité *al-Bahir fi al-jabr (Le merveilleux en algèbre)* dans lequel il cite et commente les travaux d'al-Karaji (v. 953 – v. 1029), qui est le premier mathématicien a avoir représenté un polynôme par la suite numérique de ses coefficients sous forme de tableaux. Même si l'ouvrage original d'al-Karaji est perdu de nos jours, on sait par as-Samaw'al que s'y trouvait le développement de $(a+b)^n$ et donc la suite des coefficients connue de nos jours sous ne nom de triangle de Pascal.

Ci-contre : Le triangle arithmétique d'al-Karaji.

2^e partie : Probabilité

Objectifs UAA1 : Probabilité **$6^{ème}$ 6h**

2^e partie : Probabilité

L'élève doit SAVOIR :

1. Définir :

   (1) "expérience aléatoire"

   (2) "catégorie d'épreuves"

   (3) "événement élémentaire"

   (4) "événement certain"

   (5) "événement impossible"

   (6) "événements contraires"

   (7) "événements incompatibles"

   (8) "événements équiprobables"

2. Démontrer que l'événement impossible a une probabilité nulle.

3. Compléter et démontrer : Si $\overline{A}$ est le contraire de l'événement A, alors $p\left(\overline{A}\right) = \ldots$

4. Donner la relation de Boole.

5. Donner la formule de probabilité conditionnelle.

6. Définir "événements indépendants" et donner la formule.

L'élève doit ETRE CAPABLE DE :

1. Donner la catégorie d'épreuves d'une expérience aléatoire.

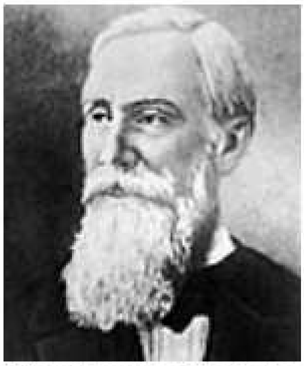
2. Associer à un événement l'ensemble qui lui correspond.

3. Donner un exemple d'événement élémentaire, d'événement certain, ou d'événement impossible d'une expérience aléatoire.
4. Donner la réunion et/ou l'intersection de deux événements.
5. Déterminer si deux événements sont contraires ou incompatibles ; et en donner un exemple.
6. Calculer la probabilité d'événements.
7. Calculer une probabilité conditionnelle.
8. Déterminer si deux événements sont indépendants.


Pierre de **Fermat**
(Beaumont-de-Lomagne, 17/8/1601 - Castres, 12/1/1665)


Jacques **Bernoulli**
(Bâle, 27/12/1654 - Bâle, 16/8/1705)


Pierre-Simon **Laplace**
(Beaumont-en-Auge, 23/3/1749 - Paris, 5/3/1827)


Pafnouti Lvovitch **Tchebychev**
(Okatovo, 16/5/1821 - St-Pétersbourg, 8/12/1894)


Andrei Andreeivich **Markov**
(Ryazan, 14/6/1856 - St-Pétersbourg, 20/7/1922)


Andrei Nikolaevich **Kolmogorov**
(Tambov, 25/4/1903 - Moscou, 20/10/1987)

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'œuvre de Jérôme **Cardan** (1501-1576), qu'un de ses biographes a surnommé « le joueur savant ». Un problème qui intéressait Cardan était le suivant : comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? La même question fut posée en 1654 à Blaise **Pascal** par son ami le **Chevalier de Méré**, qui était un joueur impénitent. Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent, mais comment doit-on répartir les mises ? Cette question fut à l'origine d'une correspondance entre Pascal et **Fermat**, et leurs réflexions furent publiées en 1657 dans *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). L'auteur est le néerlandais Christiaan **Huygens**, plus connu pour ses travaux en astronomie et en physique.

C'est donc à partir de problèmes posés par les jeux de hasard que se définirent les concepts et les premières approches de cette nouvelle branche des mathématiques.

On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser. On savait de plus que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six. Cette observation empirique pouvait-elle recevoir un fondement théorique ?

Le premier à se poser la question est le bâlois Jacques **Bernoulli**, fils de Nicolas Bernoulli, premier membre d'une longue dynastie de mathématiciens, dont les plus célèbres sont Jacques, Jean (son frère) et Daniel (le fils de Jean). Jacques Bernoulli a écrit *Ars Conjectandi*, qui ne sera publié qu'après sa mort en 1713 par son neveu Daniel.

Au 19ème siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances. Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité.

C'est **Laplace** qui s'en charge dans son ouvrage *Théorie analytique des probabilités*, paru en 1812 : « La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. » D'autres noms importants dans le domaine des probabilités sont Abraham de **Moivre** (1667-1754), Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855), Denis **Poisson** (1781-1840), Pafnouti Lvovitch **Tchebychev** (Okatovo, 16/5/1821 - St-Pétersbourg, 8/12/1894), Andrei Andreeivich **Markov** (Ryazan, 14/6/1856 - St-Pétersbourg, 20/7/1922), Andrei Nikolaevich **Kolmogorov** (Tambov, 25/4/1903 - Moscou, 20/10/1987)

Calculer la probabilité d'un événement nécessite de dénombrer les résultats possibles de l'expérience et les résultats favorables à l'événement. Lorsque les supports tels les arbres, les diagrammes et les tableaux sont difficiles à manipuler, on recourt à l'analyse combinatoire.

A. Vocabulaire et notations

1. Expérience aléatoire

Définition : Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat ne peut être prévu, mais dont les résultats possibles sont prévisibles.

Exemples : Jet d'un dé à 6 faces, jet d'une pièce de monnaie, tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes, jour d'anniversaire de Mme Dethy,…

Définition : L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **catégorie d'épreuves** et est noté Ω.

Exemple : Lorsqu'on jette une pièce de monnaie, $\Omega = \{face ; pile\}$.

Prenons un exemple que nous allons utiliser dans cette première partie du chapitre pour illustrer les prochaines définitions :
Une urne contient sept billes numérotées : 4 bleues, notées B1, B2, B3, B4 et 3 rouges, notées R1, R2 et R3. L'expérience aléatoire consiste à prendre une bille de l'urne et à noter le résultat.
Ainsi, $\Omega = \mathrm{K}$

2. Evénement

Définition : Un **événement** d'une expérience aléatoire est une partie de la catégorie d'épreuves Ω de cette expérience.

Pour notre exemple :
On peut définir (entre autres) :

- l'événement A : "Obtenir un nombre pair". Cet événement est réalisé si le résultat de l'expérience aléatoire appartient à l'ensemble $\{B2, B4, R2\}$. On identifie ainsi l'événement A à l'ensemble $\{B2, B4, R2\}$ et on note alors $A = \{B2, B4, R2\}$.
- l'événement B : "Obtenir une bille bleue". Ainsi, $B = \mathrm{K}$

Définition : On dit que l'événement A est **réalisé** au cours d'une expérience aléatoire si le résultat de cette expérience appartient à A ; sinon A est **non réalisé**.

Définition : Un événement **élémentaire** est un événement qui ne contient qu'un seul élément.

Pour notre exemple :

C : "……………………………………………….."

$C = \ldots$

Définition : L'événement **certain** est un événement qui contient tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire, il s'agit de la catégorie d'épreuves Ω.

Pour notre exemple :

D : "……………………………………………….."

$D = \ldots$

Définition : Un événement **impossible** est un événement qui n'est jamais réalisé. C'est l'ensemble vide $\varnothing$.

Pour notre exemple :

E : "……………………………………………….."

$E = \ldots$

3. Opérations sur les événements

(1) Intersection d'événements

Définition : **L'intersection** des événements A et B, notée $A \cap B$, est l'événement constitué de tous les résultats favorables à A et à B.

L'événement $A \cap B$ est réalisé lorsque les événements A et B se réalisent **en même temps**.

Pour notre exemple :

A : "Obtenir un nombre pair".

B : "Obtenir une bille bleue"

➔ $A \cap B$: "………………………………………………………."

$A \cap B = \{\ldots \ldots \ldots \ldots\}$

(2) Réunion d'événements

Définition : La **réunion** des événements A et B, notée $A \cup B$, est l'événement constitué de tous les résultats favorables à l'un, au moins, des événements A et B.
L'événement $A \cup B$ est réalisé lorsque l'événement A **ou** l'événement B se réalise.

Pour notre exemple :

A : "Obtenir un nombre pair".

B : "Obtenir une bille bleue"

➔ $A \cup B$: "……………………………………………………………"

$A \cup B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

(3) Evénements contraires

Définition : Deux événements A et F sont **contraires** si et seulement si $A \cup F = \Omega$ et $A \cap F = \emptyset$.

$\overline{A}$ désigne le complémentaire de A par rapport à Ω. L'événement $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A.

Pour notre exemple :

A : "Obtenir un nombre pair" $\rightarrow A = \{B2, B4, R2\}$

F : "Obtenir un nombre impair" $\rightarrow F = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

➔A et F sont contraires

(4) Evénements incompatibles

Définition : Deux événements A et G sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap G = \varnothing$.

Pour notre exemple :

A : "Obtenir un nombre pair" $\rightarrow A = \{B2, B4, R2\}$

G : "……………………………………………………." $\rightarrow G = \{$K K K K K K K K$\}$

➔A et G sont incompatibles

Remarque : Deux événements contraires sont toujours incompatibles.

4. Exercices

1. On jette un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.
   (1) Définis la catégorie d'épreuves.

   (2) Ecris sous forme d'ensemble les événements :

   A : "Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"

   B : "Obtenir un nombre impair"

   C : "Obtenir un nombre strictement supérieur à 4"

   (3) Décris par une phrase les événements qui suivent et écris-les sous forme d'ensembles :
   a. $A \cup B$
   b. $A \cap B$
   c. $A \cup C$
   d. $A \cap C$

e. $B \cup C$

f. $B \cap C$

g. $\overline{A}$

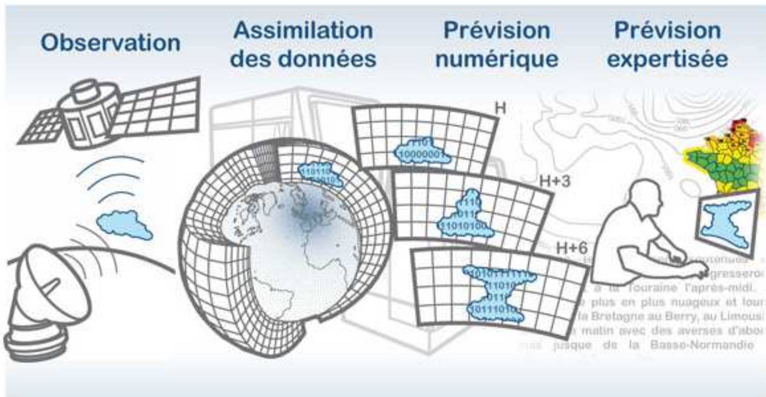
h. $\overline{A} \cup C$

i. $\overline{A} \cap C$

(4) Parmi les événements utilisés précédemment, cite deux événements incompatibles qui ne sont pas contraires.

2. ***Google Form* :** « Vocabulaire des probabilités »
https://forms.gle/tA2q6Bjo89QmGDuHA

Le saviez-vous ?



La météorologie moderne permet d'établir des prévisions de l'évolution du temps en s'appuyant sur des modèles mathématiques à court comme à long terme.

La prévision probabiliste consiste à réaliser des simulations différentes à partir de plusieurs descriptions de l'état initial de l'atmosphère. La prévision probabiliste fournit alors plusieurs possibilités d'évolution de l'atmosphère ainsi que la probabilité de chaque scénario : les prévisionnistes peuvent donc choisir le scénario le plus probable et assortir leurs prévisions au-delà de 4 jours d'un indice de confiance. Plus la prévision est fiable, plus l'indice de confiance est élevé.

(1 : confiance très faible, 5 : confiance très élevée)

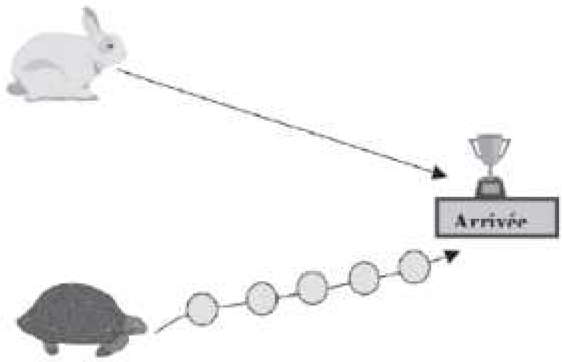
Source : *Maths – 2de, Collection Indice, Bordas*

B. Probabilités

1. Des statistiques aux probabilités…

a. Le jeu du lièvre et de la tortue

Le jeu du lièvre et de la tortue se joue avec un dé. Si le résultat est 6, le lièvre gagne ; si c'est un autre nombre, la tortue avance d'une case. La tortue gagne lorsqu'elle atteint l'arrivée avant qu'un 6 ne sorte.



On peut simuler le jeu avec la fonction "rand#" d'une calculatrice scientifique ou avec la fonction "alea()" d'un tableur. Voici une suite de 240 nombres compris entre 1 et 6 obtenus de cette manière. On convient de lire le tableau horizontalement. Les premières cases colorées correspondent aux six premiers lancers et on constate que le 6 n'apparaît pas, c'est donc la tortue qui gagne cette première partie. La deuxième partie, jouée en trois coups, est gagnée par le lièvre car le 6 est apparu au troisième lancer.

4	1	2	2	4	5	1	4	6	6	6	2	1	5	4	1	2	3	1	4
5	4	1	2	6	5	6	2	5	5	2	3	4	2	5	4	2	6	5	5
6	6	2	3	6	5	5	2	4	2	5	6	5	1	1	6	3	2	3	6
5	1	5	1	2	1	3	3	5	3	3	1	2	6	6	4	2	3	1	2
5	5	2	4	1	4	3	1	3	5	4	2	1	6	3	1	1	4	5	1
1	5	2	5	5	2	3	3	1	5	4	3	1	2	2	6	1	1	3	3
4	4	2	6	5	1	4	3	5	4	1	4	1	4	5	3	1	5	4	4
2	6	6	1	2	4	5	3	2	6	1	1	2	2	4	2	1	3	6	1
4	3	3	1	4	2	2	3	1	5	6	2	2	6	2	6	6	2	2	4
4	2	5	6	1	3	1	6	1	1	6	6	3	1	2	4	6	4	2	3
6	4	5	3	3	3	1	4	5	4	4	3	3	4	3	1	4	2	6	1
1	2	3	2	6	5	5	2	4	6	6	2	6	3	4	5	2	6	4	3

Analyse le tableau pour déterminer le nombre de parties gagnées par chacun. Déduis-en une estimation de la probabilité que la tortue gagne ; que le lièvre gagne.

b. Lancer de dés

On dispose de trois dés de couleurs différentes : un rouge, un bleu et un vert. On les jette ensemble et on note le nombre de "421" obtenus (en 1 coup). Complète le tableau :

Nombre de lancers	Nombre de "421" obtenus	Fréquence de "421"
100		
200		
300		
400		
500		
600		
700		
800		

Que peut-on en conclure ? ……………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

Quelle que soit l'expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement donné finit par se stabiliser autour d'une certaine valeur lorsque le nombre d'expériences devient très grand. Cette valeur est appelée **probabilité** de l'événement.

2. Axiomes de Kolmogorov

Les propriétés de la fréquence déjà vues en statistiques en 4ème vont permettre de donner une définition axiomatique de la probabilité.

(1) La fréquence d'un événement étant le quotient du nombre de ses réalisations par le nombre total d'expériences est un nombre compris entre 0 et 1.

(2) La fréquence de la catégorie d'épreuves est 1.

Dans l'exemple de l'activité, l'événement "Obtenir 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 sur la face supérieure" se réalisera à chaque expérience. Sa fréquence est donc bien 1.

(3) Si deux événements sont incompatibles, la fréquence de leur réunion est égale à la somme de leurs fréquences.

Dans notre exemple, le nombre de réalisations de l'événement "Obtenir 2 ou 3 sur la face supérieure" est égal à la somme des nombres de réalisations des événements "Obtenir 2 sur la face supérieure" et "Obtenir 3 sur la face supérieure". Il en est donc de même de leurs fréquences.

Axiomes de Kolmogorov (1933)

Soit une expérience aléatoire de catégorie d'épreuves Ω.

- La probabilité de l'événement A, notée $p(A)$, est un nombre réel compris entre 0 et 1 : $0 \leq p(A) \leq 1$.
- Seul l'événement certain a une probabilité égale à 1 : $p(\Omega) = 1$.
- Si A et B sont deux événements incompatibles de Ω $(A \cap B = \varnothing)$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (Loi de la somme).

Conséquences :

- Seul l'événement impossible a une probabilité nulle : $p(\varnothing) = 0$.

  En effet : $1 = p(\Omega) = p(\Omega \cup \varnothing) = p(\Omega) + p(\varnothing) = 1 + p(\varnothing)$ donc $p(\varnothing) = 0$.

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de Ω vaut 1.

- Si $\overline{A}$ est le contraire de l'événement A, alors $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$.

  En effet : $1=p(\Omega)=p\left(A\cup\overline{A}\right)=p(A)+p\left(\overline{A}\right)$ donc $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$.

Le saviez-vous ?

La loi des grands nombres joue un rôle important dans le domaine des probabilités et des statistiques. Elle fonde notamment les relations entre fréuences et probabilités. Historiquement, elle apparaît pour la première fois en 1690 dans l'*Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli (1654-1705). Cet ouvrage, publié en 1713, après la mort de l'auteur, devient rapidement un texte de référence dans ce domaine.

La loi des grands nombres exprime le fait que les caractéristiques d'un échantillon se rapprochent des caractéristiques de la population dont il est extrait lorsque la taille de cet échantillon augmente.

C'est la raison pour laquelle un sondage est plus fiable si les sondés sont plus nombreux.

La statistique expliquée à mon chat

(Voir https://www.youtube.com/channel/UCWty1tzwZW_ZNSp5GVGteaA)

3. Equiprobabilité

Lors d'une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité (c'est-à-dire que tous les résultats ont la même chance d'apparaître), on dit qu'ils sont **équiprobables**.

Dans ce cas, pour tout événement A, $\boxed{p(A)=\dfrac{\text{nombre de cas favorables à l'événement A}}{\text{nombre de cas possibles de l'expérience aléatoire}}}$.

Exemple : Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard. Quelle est la probabilité des événements A : "Obtenir un as" et B : "Obtenir une image" (images = valet, dame, roi) ?

Exercice : Belote et rebelote…

On tire une carte d'un jeu de 32.

Entoure la bonne réponse :

(1) La probabilité que cette carte soit un roi est de $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ 4

(2) La probabilité que cette carte soit un roi ou un valet est de $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ 8

(3) La probabilité que cette carte soit un cœur est de $\frac{1}{4}$ $\frac{13}{32}$ $\frac{1}{8}$

(4) La probabilité que cette carte soit un roi ou un cœur est de $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{11}{32}$

(5) La probabilité que cette carte ne soit pas un 5 est de 0 1 $\frac{1}{4}$

(6) La probabilité que cette carte ne soit ni un roi, ni un cœur est de $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{21}{32}$

4. Relation de Boole

Quels que soient les événements A et B d'une expérience aléatoire,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

<u>Exemple :</u> Interrogeant les 30 élèves de classe, un professeur se rend compte que 20 d'entre eux lisent la rubrique sportive d'un journal (événement L), 14 pratiquent un sport dans un club (événement S) et 8 font les deux. S'il choisit au hasard un élève de cette classe, la probabilité qu'il s'intéresse au sport soit par la lecture, soit par la pratique vaut

.

Le saviez-vous ?

George Boole (1815-1864) est un mathématicien anglais dont les travaux portent principalement sur la logique mathématique qu'il cherche à fonder indépendamment de la philosophie. Dans son ouvrage, *An investigation into the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* (1854), il présente une théorie mathématique binaire où 1 désigne une proposition toujours vraie et 0 une proposition fausse. Cette approche (logique de Boole), d'abord théorique, trouve des applications dans de nombreux domaines comme l'informatique, les probabilités, les circuits téléphoniques, hydrauliques et pneumatiques, etc.

5. Cas où les événements élémentaires ne sont pas équiprobables

Dans ce cas, il faut calculer la probabilité de chaque événement élémentaire, grâce à la première conséquence des axiomes de Kolmogorov : « La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de la catégorie d'épreuves vaut 1».

<u>Exemple :</u> Trois chevaux A, B et C prennent le départ d'une course. A a deux fois plus de chances de gagner que B et B a deux fois plus de chance de gagner que C. Quelles sont les probabilités d'arriver en premier pour chacun sachant qu'il n'y a pas d'ex aequo ?

6. Comment calculer la probabilité d'un événement ?

Pour calculer la probabilité d'un événement, il faut, avant tout, analyser la situation et organiser les données afin d'utiliser la technique de calcul la plus appropriée.

(1) Par comptage

Cette technique ne peut être utilisée que lorsque les événements élémentaires sont **équiprobables** et que la catégorie d'épreuves et l'événement ne contiennent qu'un **nombre fini** d'éléments.

<u>Exemple :</u> Soit l'expérience aléatoire du lancer d'un dé non truqué et l'événement A : "Obtenir 1 ou 6 sur la face supérieure". Calcule la probabilité de l'événement A.

(2) En disposant les données en arbre

Cette technique sera utilisée le plus souvent lorsque l'événement se produit en **phases successives** et qu'à chaque phase, on a un petit nombre de possibilités.

Exemple 1 : Supposons qu'à chaque naissance, la probabilité que le bébé soit un garçon est de 0,48 (et donc 0,52 pour une fille), quelle est la probabilité qu'une famille de trois enfants soit composée de 2 filles et 1 garçon ?

On retiendra :

- *Règle de multiplication* : Lorsqu'on parcourt un chemin d'un arbre, la probabilité composée est obtenue en multipliant les probabilités écrites sur chacune des branches rencontrées.
- *Règle d'addition* : Lorsqu'on doit parcourir plusieurs chemins d'un même arbre pour rencontrer tous les cas d'un événement, la probabilité totale de celui-ci est égale à la somme des probabilités correspondant à chacun des chemins.

Exemple 2 : Comment calculer la probabilité que la tortue gagne sans se référer aux expériences ou aux simulations ?

(3) En disposant les données dans des ensembles ou dans un tableau

Exemple 1 : Dans un groupe de 40 élèves, 18 ont choisi l'option math, 14 l'option physique et 8 l'option biologie. 7 élèves ont choisi à la fois math et physique, 5 biologie et physique, 3 math et biologie et enfin 2 élèves ont pris les 3 options. Si on prend un élève au hasard dans ce groupe, calcule la probabilité des événements suivants :

A : " l'élève suit l'option math " ➔ $p(A) = \ldots$

B : " l'élève suit l'option physique " ➔ $p(B) = \ldots$

C : " l'élève suit l'option math ou physique " ➔ $p(C) = \ldots$

D : " l'élève suit l'option physique mais pas math " ➔ $p(D) = \ldots$

E : " l'élève n'a choisi ni math, ni physique, ni biologie " ➔ $p(E) = \ldots$

F : " l'élève suit uniquement l'option biologie " ➔ $p(F) = \ldots$

Exemple 2 : Dans une classe, tous les élèves pratiquent une langue : soit l'allemand, soit l'espagnol.

Dans cette classe, 60 % des élèves pratiquent l'allemand, 75 % sont des filles et la moitié des élèves du cours d'espagnol sont des garçons. On interroge, au hasard, un élève de la classe. Détermine la probabilité des événements suivants :

G : " l'élève est un garçon " ➔ $p(G) = \ldots$

E : " l'élève pratique l'espagnol " ➔ $p(E) = \ldots$

F : " l'élève est une fille germaniste " ➔ $p(F) = \ldots$

(4) En utilisant l'analyse combinatoire

Exemple : Anne, Bertrand, Céline, David, Edouard et Frédéric s'assoient sur un banc. Quelle est la probabilité que les filles soient assises l'une à côté de l'autre ?

7. Exercices

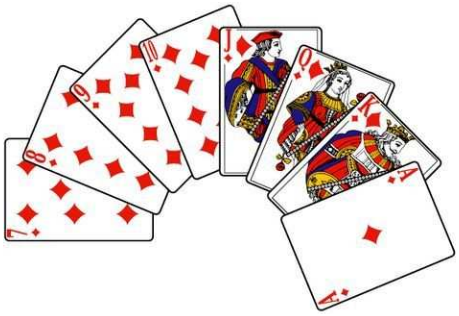
1. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité des événements suivants :

   A : " la carte tirée est le roi de cœur "

   B : " la carte tirée est rouge "

   C : " la carte tirée est un as "

   D : " la carte tirée est un as ou une carte rouge "



2. Une urne contient 8 boules jaunes, 6 boules rouges, 4 vertes et 2 bleues. On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité que

   A : " la boule tirée est jaune "

   B : " la boule tirée est rouge ou verte "

   C : " la boule tirée n'est pas noire "

   D : " la boule tirée est blanche "

3. Un chapeau contient 10 tickets numérotés de 1à 10. Si l'on tire, sans remise, deux tickets du chapeau, quelle est la probabilité que la somme des numéros tirés donne un nombre impair ?

4. Un sac contient 4 billes blanches et 2 billes noires ; un autre sac contient 3 billes blanches et 5 billes noires. Si l'on tire une bille de chaque sac, trouve la probabilité que :

   A : " les deux billes sont blanches "

   B : " les deux billes sont noires "

   C : " l'une des billes est blanche et l'autre est noire "

5. Dans une école de 800 élèves, 30 % des garçons et 60 % des filles suivent un cours de musique. On sait, de plus, que 25 % des élèves sont des garçons. Si on prend un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il fasse de la musique ou qu'il s'agisse d'une fille ?

6. L'album-souvenirs d'une école doit être produit par un comité de deux garçons et de trois filles, choisis parmi 5 garçons et 6 filles. Un des garçons est le petit ami d'une des filles. Quelle est la probabilité que le couple fasse partie du comité ?

7. On jette une pièce de monnaie truquée de telle sorte que face a 4 fois plus de chance d'apparaître que pile. Si c'est face qui apparaît, on tire une boule dans une urne qui en contient 3 rouges et 4 vertes. Si c'est pile que l'on obtient, on tire une boule dans une autre urne qui, elle, en contient 6 rouges et 3 vertes. Calcule la probabilité pour que ce soit une boule rouge qui ait été tirée.

8. Dans une population, on a observé que, pendant un mois, 40 % des individus sont allés au cinéma, 25 % au théâtre et 12 % au cinéma et au théâtre.

   Calcule la probabilité que pendant un mois, un individu

   (1) aille au cinéma ou au théâtre

   (2) n'aille pas au cinéma

   (3) n'aille ni au cinéma, ni au théâtre

   (4) aille au cinéma, mais pas au théâtre

9. Une élève choisit au hasard l'une des trois boîtes ci-dessous, sur lesquelles est inscrit le nombre de billes s'y trouvant.

A.	B.	C.
3 rouges 2 bleues	3 rouges 2 bleues	2 rouges 3 bleues

Elle prend ensuite au hasard une bille de cette boîte. Quelle est la probabilité que la bille choisie soit rouge ?

10. Deux emplois sont proposés par une société. Ils s'adressent aussi bien aux hommes qu'aux femmes. Il y a 4 candidats féminins et 2 candidats masculins. Chacun d'eux a la même chance d'être retenu.
Quelle est la probabilité d'engager
    (1) 2 hommes ?
    (2) 2 femmes ?
    (3) 2 personnes de même sexe ?
    (4) 2 personnes de sexes différents ?

11. Trois étudiants André, Bernard et Charles participent à une course à pied. André et Bernard ont la même probabilité de gagner et, comme ils sont bien entraînés, cette probabilité est double de celle de voir Charles gagner. Il n'y a qu'un seul gagnant à cette course. Quelle est la probabilité que ce soit Bernard ou Charles qui gagne ?

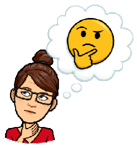
12. Une corbeille contient 6 petits pains ronds et 4 petits pains allongés.
J'en prends un, puis un deuxième. Calcule la probabilité d'obtenir :
    (1) A : " deux petits pains de même forme "
    (2) B : " au moins un petit pain rond "

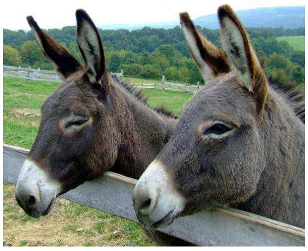
13. Quelle est la probabilité que, parmi tous les arrangements du mot SEVERE, l'un de ces arrangements commence et finisse par la lettre E ?

14. Dans une classe de 25 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins aient leur anniversaire le même jour ?

15. *GOOGLE FORM* **:** « Probabilités 1 »
https://forms.gle/sYG5xkP8PTEoXVm9A

Pour chercher :





1. Une mule accepte de sortir de son écurie avec une chance sur trois si elle en est sortie la veille, et de manière certaine si elle n'en est pas sortie la veille.

   On suppose que la mule refuse de sortir un jour donné.

   Détermine la probabilité que la mule refuse de sortir 50 jours plus tard.

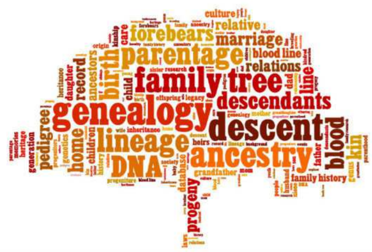
   (D'après *Tangente*, Hors-série n°17, mai 2004)

2. Paradoxe du Chevalier de Méré

   Est-il plus avantageux lorsqu'on joue aux dés, de parier sur l'apparition d'un 6 en laçant 4 fois le dé ou sur un double-six en lançant 24 fois 2 dés ?

Le saviez-vous ?

Dans les années 1970, la psychologue Anne Ancelin Schützenberger développa une théorie d'inspiration psychanalytique nommée « psychogénéalogie ». Selon cette théorie, un inconscient familial travaille si bien dans l'ombre qu'on peut contracter des maladies ou des troubles mentaux à certaines dates parce qu'un de nos ancêtres aurait lui aussi vécu quelque chose de remarquable à cette date. Disons tout de suite que l'idée présentée comme cela n'est pas absurde : on peut imaginer que quelqu'un commence une dépression le jour anniversaire de la mort de ses parents, par exemple. En revanche dans la théorie de Schützenberger, il peut s'agir de cas bien plus mystérieux. Ainsi, elle imagine qu'on peut déclarer un cancer le jour anniversaire de l'accident d'un grand-oncle, et cela même si nous ne savons pas qu'un tel accident a eu lieu. […]



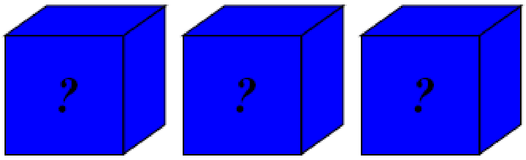
La thérapie psychogénéalogiste consiste à rechercher au moyen d'une enquête généalogique les dates importantes concernant nos ancêtres (naissance, majorité, premier amour, maladie, accident, mort, etc.), en remontant aussi loin qu'il le faut pour qu'une de ces dates se trouve être celle d'un événement important pour nous (accident, début d'une dépression, déclaration d'une maladie,etc.). Le nombre de dates recueillies lors de l'enquête dépasse bien souvent la cinquantaine et parfois la centaine, ce qui laisse planer un doute sur la nature improbable des coïncidences. […]
La question que l'on doit se poser est celle-ci : si nous prenons deux listes de dates (disons n et m dates), quelle est la probabilité qu'une date de la première liste soit la même qu'une date de la seconde ? Avec une centaine de dates concernant les ancêtres, et une dizaine nous concernant, la probabilité de collision est alors de 0,96 environ. Que deux dates coïncident est en réalité beaucoup moins étonnant que l'événement inverse.

Source : Jean-Paul Delahaye, Nicolas Gauvrit, *Comme par hasard !* book-e-book, 2012

C. Probabilité conditionnelle

1. Introduction : L'une ou l'autre

Devant toi sont posées trois boîtes d'apparence identique mais l'une d'elles contient un bonbon et les deux autres sont vides.



1. Choisis une boîte, prends-la et ne l'ouvre pas.
2. Je supprime une boîte vide parmi les deux boîtes restantes.
3. Tu peux soit garder ta boîte, soit changer et prendre la boîte restante.

Tu gagnes su tu choisis la boîte contenant un bonbon !

As-tu plus de chances de gagner en gardant la boîte initialement choisie ou en prenant la boîte restante ? Ou bien est-ce équivalent ?

2. Définition

Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire, avec $p(B) \neq 0$.

On écrit $p(A/B)$ la **probabilité conditionnelle** de A connaissant B et on a

$$\boxed{p(A/B)=\frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

<u>Exemple :</u> On lance un dé.

A : "le résultat est impair"

B : "le résultat est inférieur ou égal à 3"

Alors $p(A/B)=\ldots$

3. Exercices

1. Un magasin de vêtements démarqués a reçu un lot important de chemisiers en coton. Le propriétaire du magasin constate que les chemisiers peuvent présenter deux types de défauts : un défaut de coloris ou un bouton manquant. Il note aussi que :
   - 4 % de ces chemisiers présentent un défaut de coloris,
   - 3 % des chemisiers ont un bouton manquant,
   - 2 % des chemisiers ont à la fois un défaut de coloris et un bouton manquant.

   Une cliente prend au hasard un chemisier dans le lot. On considère les événements suivants :

   B : " le chemisier a un bouton manquant ",

   C : " le chemisier présente un défaut de coloris ".

   (1) Calcule la probabilité des événements suivants :

   D : " cette cliente prend un chemisier ayant au moins un défaut "

   E : " cette cliente prend un chemisier ayant un seul défaut "

   F : " cette cliente prend un chemisier sans défaut "

   (2) On sait que le chemisier qui intéresse la cliente présente un défaut de coloris. Quelle est la probabilité qu'il manque un bouton à ce chemisier ?

2. On dispose de deux urnes u_1 et u_2. L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1 ; sinon on tire une boule dans l'urne u_2.

   (1) Calcule la probabilité de tirer une boule blanche.

   (2) On a tiré une boule blanche. Calcule la probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1.

3. Un échantillon est constitué de 200 calculatrices scientifiques. 20 % de ces calculatrices sont vendues sans pile, 80 % ont un affichage en noir et blanc et 12% sont, à la fois, vendues sans pile et ne possèdent pas l'affichage couleur.

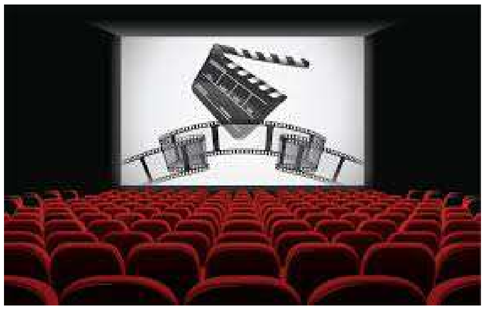
   On prend une calculatrice au hasard, quelle est la probabilité que :

   A : " si la calculatrice est vendue sans pile, elle possède l'affichage en noir et blanc "

   B : " la calculatrice soit vendue sans pile, si elle a un affichage en noir et blanc "

4. Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les moyens risques et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20 % de la population totale pour la classe R_1, 50 % pour la classe R_2 et 30 % pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement 0.05, 0.15 et 0.30.
   (1) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
   (2) Si Mr Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

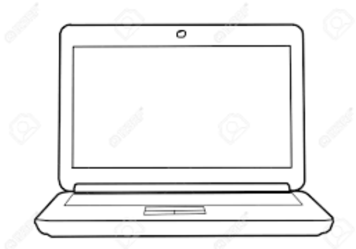
5. Les places d'une salle de cinéma sont toutes occupées. Le film proposé est une rediffusion d'une comédie à grand succès. Dans cette salle, les hommes représentent 25 % des spectateurs, les femmes $\frac{2}{5}$ des spectateurs et les autres spectateurs sont des enfants.



$\frac{1}{5}$ des hommes et 30 % des femmes ont déjà vu ce film au moins une fois. A la fin de la projection, on interroge au hasard une personne sortant de la salle.
On appelle :
   H l'événement " la personne interrogée est un homme " ;
   F l'événement " la personne interrogée est une femme " ;
   E l'événement " la personne interrogée est un enfant " ;
   V l'événement " la personne interrogée avait déjà vu le film avant cette projection "
   $\overline{\text{V}}$ l'événement " la personne interrogée n'avait jamais vu le film avant cette projection "
   (1) Exprime à l'aide d'une phrase l'événement $H \cap V$.
   La probabilité que l'événement V soit réalisé est égale à 0,345.
   (2) Calcule $p(H/V)$.
   (3) Détermine $p(\overline{V})$.
   (4) Détermine la probabilité que si l'on interroge un enfant, il ait déjà vu ce film au moins une fois avant cette projection.

6. Une urne contient vingt billes : 12 rouges, 5 bleues et 3 vertes. On tire successivement, sans remise, deux billes dans l'urne.
   (1) Calcule la probabilité que les deux billes soient vertes.
   (2) Si la première bille est bleue, quelle est la probabilité que la deuxième soit également bleue.
   (3) On sait que la deuxième bille tirée est rouge, calcule la probabilité que la première soit bleue.

7. Une entreprise a équipé chacun de ses employés d'un seul ordinateur. Pour le suivi de ses ordinateurs, l'entreprise fait appel à un même service de maintenance informatique.
   Pour évaluer ce service, l'entreprise réalise une enquête et dispose ainsi, pour chaque employé, d'une fiche précisant la marque de son ordinateur et son avis sur le service de maintenance.
   Il y a trois marques d'ordinateurs : Aliet, Balart et Celt.



   - 25 % des employés ont un ordinateur Aliet,
   - 40 % des employés ont un ordinateur Balart,
   - le reste des employés a un ordinateur Celt.

   L'enquête a fourni les résultats suivants :
   - parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance,
   - parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance,
   - parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance.

   On choisit au hasard la fiche d'un employé, chacune ayant la même probabilité d'être choisie.
   On note :

   A : " la fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet "
   B : " la fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Balart "
   C : " la fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Celt "
   S : " la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance "

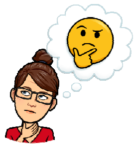
   (1) Construis un arbre pondéré décrivant la situation.
   (2) Calcule la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance.

(3) Démontre que la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.

(4) Sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, calcule la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt.

8. *Google Form* : « Probabilité conditionnelle »
   https://forms.gle/QDgCAoRkrL6fWxbj9

Pour chercher :



1. Un sac contient un jeton, dont on sait qu'il est blanc ou noir. On ajoute dans le sac un jeton blanc. On mélange et on tire au hasard l'un des jetons, qui est blanc.
   Quelle est maintenant la probabilité de tirer un jeton blanc ?
   (Extrait de *Enigmes mathématiques*, Lewis Carroll (romancier et professeur de mathématiques), Editions Pole 1999)

2. Je dispose de quatre crayons, deux rouges et deux bleus. J'en mets deux dans la poche droite et les deux autres dans la poche gauche de mon pantalon, sans faire attention à leur couleur. Je sors un crayon de ma poche droite, il est rouge.
   Quelle est désormais la probabilité de prendre un crayon rouge dans la poche gauche ?

Dans l'émission télévisée *Let's make a deal* (1963-1977) présentée par Monty Hall, les candidats devaient choisir en deux temps une porte à ouvrir parmi trois : derrière l'une d'elle, se trouvait une voiture à gagner, et derrière les deux autres, une chèvre. La stratégie à choisir pour le candidat (changer d'avis ou non au moment du deuxième choix) a suscité beaucoup de commentaires.

D. Evénements indépendants

1. Définition

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si le fait de savoir que B est survenu ne change pas la probabilité de A. Dans ce cas, on a $p(A/B) = p(A)$.

Comme $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, on voit que l'indépendance de A et B équivaut à $p(A \cap B) = p(A).p(B)$.

Deux événements sont **dépendants** s'ils ne sont pas indépendants.

2. Exemples

(1) Cartes

On tire au hasard une carte d'un paquet de 52 cartes. Désignons par A l'événement "la carte tirée est un as" et par B "la carte tirée est un pique". Alors A et B sont indépendants car

(2) Deux dés

On jette deux dés bien équilibrés.
A_1 est l'événement "la somme donnée par les dés est 6".
B désigne "le premier dé donne 4".
Dans ce cas,
$p(A_1 \cap B) = \ldots$ et $p(A_1).p(B) = \ldots$

➔ A_1 et B sont donc ………………………

Intuitivement, la raison en est claire : si l'on espère obtenir une somme de 6 sur les deux dés, l'apparition d'un 4 sur le premier dé (ou d'un 1, d'un 2, d'un 3 ou d'un 5) laisse espérer d'atteindre ce résultat.

Par contre, si le premier dé donne déjà 6, il n'y a plus aucune chance d'obtenir 6 au total. En d'autres termes, la probabilité d'obtenir 6 sur deux dés dépend clairement du résultat apparu sur le premier dé.

Désignons maintenant par A_2 l'événement "la somme donnée par les dés est 7". A_2 est indépendant de B car :

3. Exercices

1. Dans un club de loisirs, différentes activités de découverte sont proposées dont le tennis et le golf. Sur les 48 adhérents, on compte 12 inscriptions pour le tennis et 16 pour le golf, 4 adhérents étant inscrits à la fois au tennis et au golf.
   On sort au hasard la fiche d'un adhérent.
   On désigne par T l'événement "l'adhérent est inscrit au tennis" et par G l'événement "l'adhérent est inscrit au golf".
   (1) Les événements T et G sont-ils indépendants ?
   (2) Les événements T et $\overline{G}$ sont-ils indépendants ?

2. Considérons une famille de 2 enfants. Les événements A : "enfants de sexe différent" et B : "au plus une fille" sont-ils indépendants ?
   Qu'en est-il pour une famille de 3 enfants ?

3. Considérons une urne contenant 3 boules blanches, 2 rouges et 5 noires. Une expérience consiste à tirer au hasard, sans remise et successivement, 2 boules de cette urne.
   Montre que les événements B_1 : " la première boule tirée est blanche" et B_2 : "la deuxième boule tirée est blanche" sont dépendants.

4. Un disque compact comprenant huit morceaux est introduit dans le lecteur CD d'une chaîne hi-fi.

   L'appareil permet de passer, dans un ordre aléatoire, sans répétition, ces morceaux.

   On écoute l'enchaînement proposé par la chaîne.

   (1) Combien d'enchaînements distincts la chaîne peut-elle proposer ?

   (2) Quelle est la probabilité que la chaîne propose l'enchaînement que vous souhaitez entendre ?

   (3) On note E l'événement « la chaîne propose le morceau numéro 8 en première position ». Calcule $p(E)$.

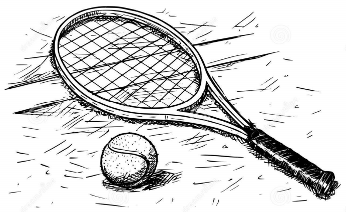
   (4) On note F l'événement « la chaîne propose le morceau numéro 7 en deuxième position ». Les événements E et F sont-ils indépendants ?

5. Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie.

	Tennis	**Equitation**	**Voile**
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

   (1) Les événements "étudier l'allemand" et "pratiquer le tennis" sont-ils indépendants ?

   (2) Les événements "étudier l'anglais" et "pratiquer la voile" sont-ils indépendants ?



6. *Google Form* : « Evénements indépendants »

   https://forms.gle/N8jWQ4p5ZpwZ4Neb9