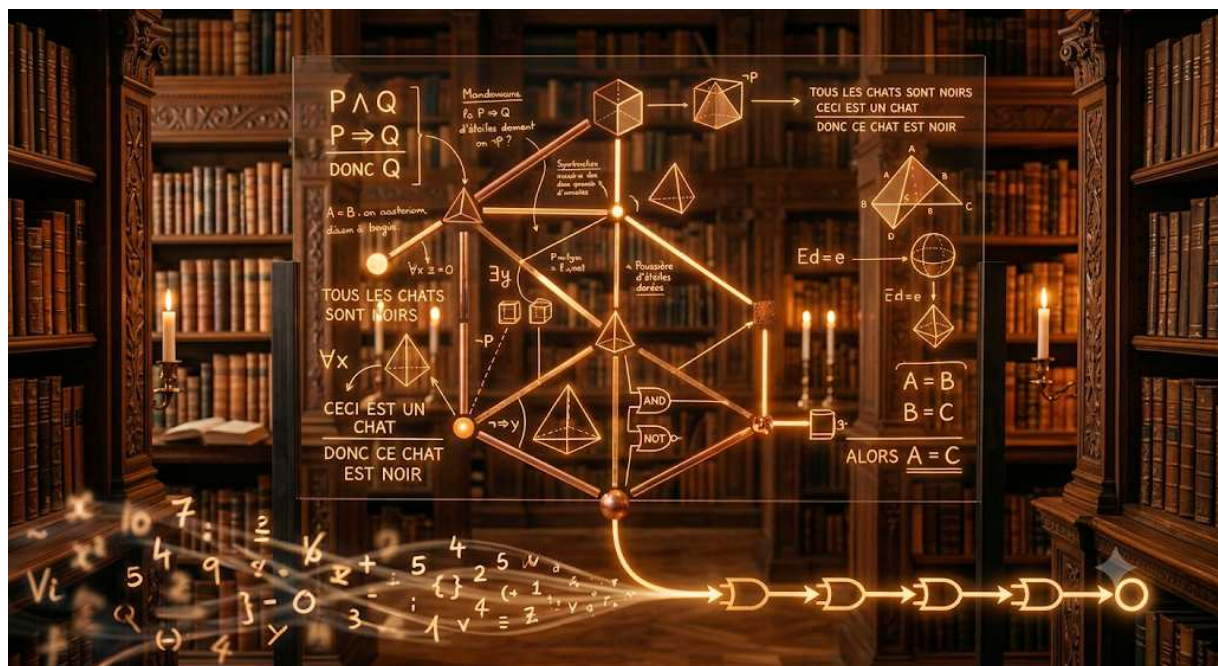


Logiques booléenne et mathématique



La logique booléenne, inventée par le mathématicien britannique George Boole, s'intéresse à la manière dont on peut créer de nouvelles propositions à partir de propositions dites « élémentaires » et comment, de la vérité ou la fausseté de ces propositions élémentaires, on peut déduire la vérité ou la fausseté des propositions construites.



George Boole
(1815-1864)

De nos jours, les ordinateurs s'appuient sur cette logique et sur le fait que tout l'information peut s'encoder sous une forme binaire, c'est-à-dire une suite de bits. Un bit est l'unité de représentation de l'information. Il peut prendre deux valeurs : 0 (faux) ou 1 (vrai).

A. Fonctions booléennes et tables de vérité

Une **proposition logique** est une phrase dont on peut envisager sans ambiguïté de sa vérité ou de sa fausseté. Les affirmations telles que « Aujourd'hui je porte un pull rouge » ou « 3 est un nombre premier » sont des propositions logiques. Alors que « Quelle heure est-il ? » ou « Je cornifle gauche bien » ne le sont pas.

Pour désigner les propositions de manière abstraite, on utilisera généralement des lettres majuscules P , Q , ...

On peut combiner les propositions pour en construire de nouvelles grâce à la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence :

Appellation	français	logique
négation	non P	$\neg P$
conjonction	P et Q	$P \wedge Q$
disjonction	P ou Q	$P \vee Q$
implication	si P alors Q	$P \Rightarrow Q$
équivalence	P ssi Q	$P \Leftrightarrow Q$

Ces divers symboles ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) sont appelés des **connecteurs logiques**.

Exercices :

1. En interprétant P par « je pars », Q par « tu restes » et R par « il n'y a personne », traduis les assertions suivantes en phrases du langage naturel.

$$(1) (P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$$

$$(2) (\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg R$$

2. Soient P la proposition « les chiens aboient » et Q la proposition « la caravane passe ».

Traduis les phrases suivantes en langage propositionnel

- (1) Si les chiens aboient, alors la caravane passe.
- (2) Les chiens n'aboient pas.
- (3) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
- (4) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Si la propriété P est vraie, on notera que la **valeur de** vérité de P vaut 1 ; par contre, si P est faux, sa valeur de vérité vaut 0.

Une **table de vérité** est un tableau qui représente des entrées (en colonne) et des états binaires (0 et 1). Le résultat se lit dans la dernière colonne et s'exprime également sous forme binaire.

Voici les tables de vérité des cinq connecteurs logiques précédents :

Négation : Elle inverse la valeur d'entrée.

P	$\neg P$
0	1
1	0

Conjonction : Pour que le résultat soit vrai, il faut que *toutes* les conditions soient vraies en même temps.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjonction : Pour que le résultat soit vrai, il suffit *qu'au moins une* des conditions soit vraie.

Cela contraste avec l'usage courant de « ou » par lequel on entend souvent l'exclusion de P et Q . Si, pour le goûter, je te propose une tartelette ou un éclair, tu ne choisiras qu'une gourmandise.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implication : Elle permet de traduire une règle du type « Si la condition P est vraie, alors la conséquence B doit l'être aussi ».

Illustrons par un exemple : Si je gagne au loto (P), alors je t'offre une voiture (Q).

Quand l'affirmation est-elle vraie ? Ou, autrement dit, quand peut-on dire que je tiens ma promesse ?

- Si je gagne au loto (P est vrai) et que je t'offre une voiture (Q est vrai), j'ai fait ce que j'ai promis et $P \Rightarrow Q$ est vrai.
- Si je gagne au loto (P est vrai) et que je ne t'offre pas de voiture (Q est faux), je n'ai pas tenu ma promesse et $P \Rightarrow Q$ faux.

- Si je ne gagne pas au loto (P est faux), je ne me suis engagé à rien. Que je t'offre une voiture (Q est vrai) ou pas (Q est faux), j'ai tenu ma promesse (on ne peut pas dire que je suis un menteur).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Equivalence : L'équivalence logique signifie que P et Q doivent toujours avoir exactement la même valeur. Si l'un est vrai, l'autre doit l'être. Si l'un est faux, l'autre aussi.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exercices :

1. Construis les tables de vérités des expressions suivantes :

(1) $P \vee \neg Q$

(2) $\neg(Q \wedge \neg P)$

(3) $(P \wedge Q) \vee (\neg P)$

(4) $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$

(5) $\neg P \wedge \neg Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

(6) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

(7) $(P \wedge Q) \vee (\neg R)$

2. Démontre, à l'aide d'une table de vérité, que l'expression $\neg P \vee Q$ est strictement identique à l'implication $P \Rightarrow Q$.

3. Dans une école, l'accès sécurisé au laboratoire de chimie (L) est régi par l'expression suivante : $L = (P \Rightarrow C) \wedge (\neg A)$

où P = un professeur est présent

C = les clés sécurisées sont insérées

A = l'alarme incendie est activée

(1) Traduis cette condition d'accès en une phrase en français.

(2) La porte du labo s'ouvre-t-elle (L=1) si aucun professeur n'est là (P=0), qu'aucune clé n'est insérée (C=0) et que l'alarme est éteinte (A=0) ? Justifie avec le calcul booléen.

B. Propriétés

Simplifier une expression booléenne permet de rendre les programmes plus rapides ou de fabriquer des circuits avec moins de composants (donc moins chers et plus fiables).

Propriétés :

- Élément neutre : $P \vee 0 = P$ et $P \wedge 1 = P$
- Élément absorbant : $P \vee 1 = 1$ et $P \wedge 0 = 0$
- Idempotence : $P \vee P = P$ et $P \wedge P = P$
- Complément : $P \vee (\neg P) = 1$ et $P \wedge (\neg P) = 0$
- Double négation : $\neg(\neg P) = P$
- Distributivité : $\neg(\neg P) = P$

Les lois de De Morgan sont indispensables pour simplifier des circuits ou des conditions en programmation.



Lois :

- $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$ (Le NON d'un ET devient un OU de NONs)
- $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$ (Le NON d'un OU devient un ET de NONs)

Exercice : Démontre, à l'aide d'une table de vérité, que la négation d'un « ET » de 2 propositions est égale au « Ou » des négations de ces propositions (1^{ère} loi).

Exercice : Simplifie au maximum les expressions logiques suivantes en détaillant chaque étape et en précisant les propriétés utilisées. Vérifie ensuite le résultat avec une table de vérité.

$$(1) (P \wedge Q) \vee (P \wedge (Q \vee R)) \vee ((\neg P) \wedge R)$$

$$(2) \neg[((\neg P) \wedge Q) \vee (\neg(P \vee R))]$$

Propriété : Une proposition est une **tautologie** si elle est toujours vraie.

Exemple : $P \Rightarrow P$

Exercices : Montre que les propositions suivantes sont des tautologies :

$$(1) \quad [(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow (\neg P)$$

$$(2) \quad \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$$

$$(3) \quad [((\neg Q) \wedge (P \vee R)) \Rightarrow P] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee (\neg R))]$$

Propriété : Une proposition est une **contradiction** si elle est toujours fausse.

Exemple : $P \wedge (\neg P)$

Exercices : Montre que les propositions suivantes sont des contradictions :

$$(1) \quad (P \vee Q) \wedge (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

$$(2) \quad ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \wedge \neg R)$$

$$(3) \quad ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow S)) \wedge (P \wedge \neg S)$$

C. Quantificateurs

En logique booléenne, on travaille avec des propositions (P , Q , R). En logique mathématique, on travaille sur des ensembles d'éléments (comme les nombres réels ou les naturels).

Pour cela, on utilise deux nouveaux symboles appelés « quantificateurs ».

- **Le quantificateur universel** : $\forall$ (« pour tout »)

Il remplace une sorte de « ET géant ». Il signifie que la propriété est vraie pour tous les éléments d'un ensemble.

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

Pour tout nombre réel x , son carré est supérieur ou égal à zéro.

- **Le quantificateur existentiel** : $\exists$ (« il existe au moins un »)

Il remplace une sorte de « OU géant ». Il suffit qu'un seul élément vérifie la propriété pour que l'affirmation soit vraie.

Exemple : $\exists x \in \mathbb{R}, x + 3 = 0$

Il existe au moins un réel x tel que $x + 3 = 0$.

De même que $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$ en logique booléenne (1^{ère} loi de De Morgan), nier une phrase mathématique avec des quantificateurs inverse les symboles :

- La négation de $\forall$ devient $\exists$: $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$

Exemple : La négation de « Tous les élèves ont réussi » est « Il existe au moins un élève qui a échoué ».

- La négation $\exists$ de devient $\forall$: $\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$

Exemple : La négation de « Il existe un chat noir » est « Tous les chats sont non-noirs ».

Grâce à ces équivalences booléennes, les mathématiciens ont inventé plusieurs méthodes de démonstration.

1. La contraposée

Au lieu de prouver que $P \Rightarrow Q$, on prouve que $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemple : Démontrons "Si n^2 est impair, alors n est impair".

Si on essaie de démarrer directement avec l'hypothèse " n^2 est impair" : On pose $n^2 = 2k + 1$ (définition d'un nombre impair, avec $k \in \mathbb{N}$). Pour trouver n , il faudrait prendre la racine carrée : $n = \sqrt{2k + 1}$. Extraire une propriété de parité d'une racine carrée est assez maladroit et difficile à formaliser proprement.

Nous allons donc démontrer cette propriété en démontrant sa contraposée, qui est : "Si n n'est pas impair, alors n^2 n'est pas impair". Autrement dit, "Si n est pair, alors n^2 est pair".

On suppose que n est un nombre pair.

On peut donc écrire $n = 2k$ (où k est un entier).

Ainsi, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$

Comme $2k^2$ est un entier, on vient d'écrire n^2 sous la forme d'un nombre pair.

2. Le raisonnement par l'absurde

Pour prouver qu'une affirmation P est vraie, on suppose que $\neg P$ est vraie et on cherche une contradiction logique, du type $P \wedge (\neg P) = 0$ (une proposition ne peut pas être vraie et fausse en même temps).

Ainsi, pour prouver qu'une affirmation P est vraie, on admet que $\neg P$ est vraie. On déroule des déductions mathématiques parfaitement rigoureuses à partir de cette hypothèse. Si ces déductions aboutissent à une **contradiction** ou une **absurdité** (comme $1=3$), alors l'hypothèse de départ ($\neg P$) est nécessairement fausse, ce qui prouve que P est vraie.

Exemple : « Je suis sûr que mes clés ne sont pas dans ma poche. »

Pour vérifier par l'absurde, tu mets la main dans ta poche... et tu y sors tes clés.

L'hypothèse « mes clés ne sont pas dans ma poche » a mené à une contradiction.

Cette hypothèse est donc fausse et les clés étaient bien dans ta poche.

Exemple : « $\sqrt{2}$ est irrationnel. »

C'est l'une des démonstrations les plus célèbres de l'histoire des mathématiques (attribuée à Pythagore).

Rappelons qu'un nombre rationnel est un nombre qui s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible de nombres entiers.

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, on suppose son contraire : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre irrationnel. On peut donc l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible de nombres entiers : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers non nuls. Comme la fraction est irréductible, a et b n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

On élève chaque membre de l'égalité au carré : $2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$.

Puisque $a^2 = 2b^2$, alors a^2 est un nombre pair. Ainsi, a est également un nombre pair. On peut donc écrire $a = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$).

On remplace a par $2k$ dans l'équation $a^2 = 2b^2$:
 $(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$.

Puisque $b^2 = 2k^2$, alors b^2 est aussi un nombre pair. Ce qui implique que b est également un nombre pair.

Ce qui mène à une contradiction : on a supposé que a et b n'ont aucun diviseur commun autre que 1, mais on vient de prouver que 2 est un diviseur commun.

Ce que l'on a supposé (que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre irrationnel) est donc faux et $\sqrt{2}$ est bien un nombre irrationnel.

Exercices :

1. Soient x et y deux nombres réels. Démontre par contraposée que : Si $x.y \neq 0$, alors $x \neq 0$ ET $y \neq 0$.

2. Soit x un nombre réel. Démontre par contraposée l'implication suivante :

$$\text{Si } \frac{x+1}{x-2} = 3, \text{ alors } x \neq 5.$$

3. Soient a et b deux nombres réels. Démontre par l'absurde que : Si $a+b \geq 10$, alors $a \geq 5$ OU $b \geq 5$.

4. Soit a un nombre réel non nul. Démontre par l'absurde l'implication suivante :

$$\text{Si } a + \frac{1}{a} = 2, \text{ alors } a = 1.$$